Elementos
Libro I

Euclides

Tradución de José Nicanor Alonso Álvarez
e José Montero Reguera

ATG
asociación de
tradutores
galegos

EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBRO I

Tradución, prólogo e notas de:

José Nicanor Alonso Álvarez

José Montero Reguera

Á idade de once anos, comecei a ler a Euclides, coa guía do meu irmán. Este foi un dos grandes acontecementos da miña vida, tan fascinante coma o primeiro amor.

Bertrand Russell

Palabras para unha tradución

Ningún libro precisa xustificación, pero este é con certeza un dos casos nos que a anterior afirmación resulta máis evidente. Porque durante dous mil anos o edificio da ciencia foi medrando recorrendo adoito aos resultados presentados por Euclides nos seus *Elementos.* De feito, sería máis acertado referirse a eles non coma “un” libro, senón coma “o” libro, pois dese xeito o nomearon ao longo da historia. E malia os anos decorridos, aínda hoxe o traballo de Euclides xera ciencia, publicándose novas probas dalgúns dos seus resultados. A xeito de proba do que afirmamos, introducindo no buscador Google o nome Euclides aparecen preto de tres millóns duascentas mil entradas. Aínda restando algunhas que corresponderán a outros Euclides (por exemplo o de Megara), sen dúbida a cifra resultante queda moi por riba das que acadan outros científicos da Antigüidade (por citar algún dos máis coñecidos, Arquímedes anda arredor do millón cento cincuenta mil, e Pitágoras non chega ao millón). Pero o noso autor tamén resiste a comparación cos máis grandes matemáticos de toda a Historia, pois cóntanse cos dedos dunha man os que acadan maior número de referencias (para o lector curioso, citaremos a Euler (1707-1783), Gauss (1777-1855) e Hilbert (1862-1943), todos moi posteriores a Euclides).

Por todo isto, a pregunta non é “por que Euclides en galego?”, senón “como non estaba Euclides en galego?”. Como foi posible que ningunha das dúas mil edicións dos *Elementos* estivera na nosa lingua? Esa foi a pregunta que os autores desta tradución se fixeron, e a que motivou o traballo que agora presentamos.

Logo desta reflexión, e resoltos xa que logo a levar adiante o traballo, ficaban aínda dous problemas por resolver. En primeiro lugar, cantos libros traducir? Ao cabo, os *Elementos* son un conxunto de trece libros, atinxindo diversos campos dentro da

Xeometría, e co decurso do tempo (máis de dous mil trescentos anos) xa non se consideran un texto de referencia na matemática ("Abaixo Euclides!" exclamou en 1968 Jean Dieudonné (1906-1992), un dos principais membros do grupo Bourbaki, de grande influencia na chamada matemática moderna). Este argumento, xunto coa intención sempre presente de elaborar un texto a cabalo entre a tradución e a divulgación científica, axudounos a tomar a decisión: traduciríamos unicamente o primeiro libro, o máis coñecido e importante dos trece.

Tocaba logo atacar o segundo asunto: escoller o texto fonte. Este problema non é tal en moitas traducións, por dispoñer o tradutor do texto orixinal. Pero non hai tanta sorte no caso de Euclides, pois o manuscrito máis antigo conservado sobre a súa obra é do século IX (conservado na Biblioteca Bodeliana de Oxford), habendo algún máis de séculos posteriores. Escusamos dicir que máis de mil anos despois de ser escrito o orixinal, e considerando os posibles erros e engadidos dos múltiples copistas, o devandito manuscrito, máis que una copia podería considerarse unha versión dos *Elementos*. De calquera xeito, isto non representaba problema ningún de cara a iniciar a tradución, pois polo contraste entre os diversos manuscritos existentes temos a certeza de que estes recollen as ideas, (e sobre todo a mecánica de exposición, probablemente máis valiosa aínda) do orixinal de Euclides. A un tempo, e non sendo os tradutores expertos latinistas, esta circunstancia favorecía a escolla dun texto que, non sendo tan antigo, fora abondo fidedigno aos manuscritos coñecidos, permitindo ademais acadar o obxectivo de divulgación sempre presente na nosa mente, dando a coñecer, xunto coa matemática euclídea, aspectos históricos relevantes sobre esta ciencia. Por sorte, o devandito texto existía, sendo ademais a primeira tradución de Euclides ao castelán, realizada en 1574 por Rodrigo Zamorano, catedrático de Cosmografía en Sevilla. O seu traballo, que recolle os seis primeiros libros dos Elementos foi, xa que logo, o texto fonte escollido para a nosa tradución.

Un matemático en Alexandría: Euclides

Resulta evidente a necesidade de falar un pedazo sobre o autor antes de pasar a expoñer a súa obra. Neste caso, cómpre dicir en primeiro lugar que é máis o que se supón que o que se sabe, e aínda sobre isto último hai dúbidas. De calquera xeito, é comunmente admitido que Euclides existiu, e que arredor do ano 300 antes de Cristo, rematada a súa formación na Academia fundada por Platón, recalou na Alexandría de Ptolomeo I coa intención de abrir unha escola de matemáticas. A lenda (de procedencia árabe) conta que alí viviu no barrio de Bruchium, preto da Biblioteca, á que deixou una copia das súas obras adicadas a reunir dun xeito ordenado o saber matemático da época.

Non dispomos de testemuño ningún sobre as súas capacidades como docente, pero si son ben coñecidas (aínda que de dubidosa veracidade, sobre todo a primeira) dúas anécdotas sobre o seu traballo que poden dar unha idea da súa personalidade. Así, contan que o noso home, cando o gran Ptolomeo I lle preguntou por un modo de entender a Xeometría máis doado que o presentado por el nos *Elementos*, respondeulle que “non hai camiño real ningún en Xeometría”. Na segunda anécdota temos a un alumno que, logo da primeira clase, pregunta a utilidade do aprendido. E o profesor, ofendido, chama ao seu escravo e dille: “Dálle tres óbolos, pois cómprelle gañar algo do que aprende”. Este diálogo pon de manifesto o pensamento de Euclides sobre a Matemática: algo que debe cultivarse independentemente da súa utilidade práctica, polo pracer do coñecemento. Neste sentido segue a liña do seu predecesor, Pitágoras, que na súa comunidade distinguía dous tipos de alumnos: os *matematikós* ou posuidores do coñecemento, que podían intervir abertamente nas discusións científicas da seita, e os *akusmatikós* ou auditores, que unicamente podían escoitar as ensinanzas. Pero anécdotas á parte, o máis importante da actividade docente de Euclides foron as súas obras, nas que recompilou gran parte do saber matemático da época (de feito, non se lle atribúe case ningún dos resultados que recolle, aínda que é evidente o seu esforzo por expoñer os coñecementos dun xeito claro e sistemático). Delas, hai algunhas perdidas, das que só coñecemos o título, como *Lugares de superficie*, *Pseudaria* e *Porismas*, e outras que afortunadamente, e grazas ao traballo de innumerables copistas, chegaron máis ou menos mutiladas (e tamén con engadidos, pois todo hai que dicilo) ata os nosos días. Son cinco: *Elementos*, *Datos*, *División de figuras*, *Fenómenos* e *Óptica*, e entre elas destaca, pola súa importancia e influencia posterior, os *Elementos*, dos que falaremos máis polo miúdo a continuación.

Os *Elementos*

Ante todo, e como indicabamos antes, os *Elementos* é o máis importante dos libros de Euclides. De feito, algúns autores posteriores se referían ao autor co alcume de "O elementador". Trátase dun libro de texto, formado por trece libros (hai dous máis que se atribuíron erroneamente a Euclides, pero son posteriores á súa época, probablemente un deles debido a Hipsicles de Alexandría e o outro a Isidoro de Mileto). Os seis primeiros tratan sobre xeometría plana elemental, os tres seguintes sobre teoría de números, o décimo sobre inconmensurables e os tres últimos sobre xeometría espacial. En conxunto, 132 definicións, 5 postulados, 10 sentenzas comúns e 465 proposicións. Como libro de texto é un auténtico best-seller, a *Biblia* das matemáticas, o máis traducido despois da auténtica *Biblia*, con máis de 2000 edicións, e que malia estar escrito 300 anos antes da nosa era, continuou sendo o texto de referencia ata ben entrado o século XIX (de feito, cando nunha clase de matemáticas se xustificaba algo en base, por exemplo ao teorema de Pitágoras, abondaba con dicir I 47 e todo o mundo entendía que se refería ao resultado 47 do libro I dos *Elementos* de Euclides).

Os contidos reunidos por Euclides nesta obra constitúen o que naquela época era a matemática elemental, é dicir, o conxunto de coñecementos básicos e previos a calquera investigación futura. Non hai, xa que logo, resultados de cálculo (alleos ao ensino superior) nin de matemática avanzada (por exemplo cónicas). Por tanto, non estamos diante dunha obra nova. Nin única, pois coñécese a existencia de polo menos outros tres textos semellantes e anteriores, atribuídos a Hipócrates, Leone e Teudio. Cal foi entón o motivo do seu éxito, ata o punto de ser a única obra deste tipo que sobreviviu ao decurso do tempo? A resposta a esta pregunta, a orixinalidade que con certeza a fixo superior a todas as demais, é a presentación dos coñecementos dun xeito lóxico e ordenado que facilita a súa lectura. Este método de presentación dos resultados, que poderíamos chamar axiomático, e que foi adoptado con posterioridade por infinidade de autores, parte dun conxunto de fundamentos que se toman como dados, a partir dos cales se constrúen resultados que á súa vez servirán para obter outros novos, erguendo deste xeito o edificio das matemáticas. As vantaxes do método son claras: en primeiro lugar, imos do máis simple ao máis complexo, o que facilita a comprensión; e por outra banda cada resultado ten un encaixe no conxunto que permite relacionalo cos anteriores, de xeito que o conxunto constitúe un tecido onde cada fío é perfectamente identificable.

Como exemplo explicativo do que estamos a contar, abonda detallar un chisco a estrutura do libro I, con certeza o máis lido e estudado dos trece (que por outra banda repiten o mesmo esquema). O texto comeza cunha lista de vinte e tres definicións da xeometría plana. Cómpre dicir que algunhas destas definicións non son aceptables hoxe, pois calquera sistema lóxico debe partir dun mínimo de términos non definidos a partir dos cales comezar, e neste caso o desexo do autor de explicalo todo faille incluír definicións que realmente non definen nada: “Un punto é o que non ten partes”, outras que presentan problemas lóxicos: “Os extremos dunha liña son puntos”, e outras claramente deficientes: “Un ángulo plano é a inclinación de dúas liñas que se cortan sobre una superficie plana” (cal é a definición de inclinación?). Pero todos estes erros son perfectamente escusables se temos en conta o contexto histórico da obra. A continuación enumera cinco postulados e outras tantas sentenzas comúns. Non está moi clara a diferenza que para o autor había entre os uns e as outras. Tendo en conta as ideas de Aristóteles, algúns autores aventuran que os postulados serían hipóteses ou condicións a exixir de partida, pero que poderían ser probadas, mentres que as nocións comúns serían axiomas, é dicir, verdades evidentes que se admiten sen demostración. De calquera xeito e como información ao lector debemos dicir que estas dez condicións non abondan para xustificar todas as demostracións do libro. O grande matemático David Hilbert calculou que para iso serían precisas vinte e unha. Pero de novo debemos acudir á época da redacción do texto para considerar isto un erro sen importancia ningunha. Máis interesante, sen dúbida é o acontecido co máis famoso dos postulados da lista. O número cinco:

Se trazando unha liña recta sobre outras dúas os ángulos interiores do mesmo lado son menores que dous rectos, entón as dúas liñas rectas prolongadas indefinidamente cortaranse no lado onde están os ángulos menores que dous rectos.

Coñecido como o “postulado das paralelas”, foi considerado durante moito tempo non como un postulado senón como unha proposición, é dicir, algo demostrable. De feito, o mesmo Euclides segue camiños moi complexos nalgunhas demostracións para evitar usar esta hipótese, que utiliza por vez primeira na proposición número vinte e nove do libro I (se ben é certo que, unha vez a emprega por vez primeira, continúa facéndoo practicamente en todas as seguintes proposicións deste libro). Como é natural, moitos matemáticos tentaron acadar unha proba, obtendo co tempo unha chea de postulados equivalentes, algúns unha miga semellantes, coma o de Playfair, que di que por un punto exterior a unha recta só é posible trazar unha paralela a esta recta, outros como o do triángulo tan diferentes como para que non apareza neles a palabra recta: a suma dos ángulos dun triángulo é igual a dous rectos (é dicir, cento oitenta graos). Pero independentemente da formulación escollida para o intento de demostración, os postulados resistían todos os ataques. A solución ao problema non chegou ata o século XIX, máis de dous mil anos despois da aparición dos *Elementos*, e resultou abondo sorprendente: para explicalo dun xeito sinxelo, o quinto postulado era indemostrable. Existían xeometrías non euclidianas pero igualmente consistentes. Así, considerando a posibilidade de que a suma dos ángulos dun triángulo fora menor de cento oitenta graos, Gauss, Bolyai e Lobachevski (traballando independentemente, e sendo Gauss o primeiro en chegar aos resultados, aínda que por prudencia preferiu non dalos a coñecer, temendo, nas súas propias palabras, “os berros dos beocios”) construíron a xeometría hiperbólica, na que por un punto exterior a unha recta poden trazarse infinitas paralelas.

Máis adiante, Riemann, supoñendo que a suma dos ángulos dun triángulo era maior de cento oitenta graos (ou equivalentemente que por un punto exterior a unha recta non pode trazarse paralela ningunha), abriu os camiños da xeometría elíptica. Cómpre dicir para rematar con este asunto que o lector non debe pensar na xeometría euclídea como a única "real", no sentido de que explica o mundo físico, considerando as outras meras elucubracións do intelecto humano. Sería con certeza un erro, pois foi precisamente a xeometría de Riemann a que permitiu a Einstein desenrolar a súa teoría da relatividade.

Con estes alicerces principian as diferentes proposicións do libro. Hainas de dous tipos: problemas, nos que o autor propón unha construción xeométrica, e teoremas, nos que formula unha propiedade xeométrica xeral. Tanto nun caso coma no outro, a estrutura é idéntica: logo do enunciado, exponse o punto de partida, para continuar coa afirmación do que se pretende probar. A continuación ven a proba propiamente dita, na que se é preciso utilízanse as definicións, sentenzas comúns e postulados, así como resultados previamente obtidos, para finalizar a xeito de conclusión coa repetición do enunciado. Calquera estudante recoñecerá este esquema, pois aínda hoxe é o patrón de calquera demostración matemática.

Neste libro I preséntanse un total de corenta e oito proposicións, repartidas entre catorce problemas e trinta e catro teoremas. Basicamente trátase de resultados relativos a triángulos, rectas paralelas e paralelogramos. Algunhas proposicións tiveron certa sona, como a quinta, coñecida co nome de *Pons asinorum*, é dicir, "a ponte dos parvos", en parte pola semellanza entre unha ponte e o diagrama que debuxa Euclides na proba, pero tamén por ser o primeiro resultado no que moitos estudantes tropezaban, incapaces de seguir a demostración, a ponte que os parvos non eran quen de cruzar. Tamén cómpre sinalar a vinte (dous lados dun triángulo miden xuntos máis ca o terceiro), considerada polos epicúreos unha verdade evidente ata para un asno. Pero con certeza a proposición máis coñecida deste libro (e dos trece que conforman os *Elementos*) é a número corenta e sete. Nela establécese que un triángulo é rectángulo se e só se o cadrado da hipotenusa é igual á suma dos cadrados dos catetos. Aínda que era un resultado coñecido polos antigos babilonios e outras civilizacións anteriores á grega, hoxe é comunmente admitido que foi Pitágoras o primeiro en proporcionar unha proba, polo que pasou á historia co nome de *Teorema de Pitágoras*. Debido a súa importancia, foi coñecido cos máis diversos nomes: teorema da muller casada para os gregos, *magister matheseos* e *inventum hecatombe dignum* na idade media, aludindo neste último caso a lenda que asegura que Pitágoras mandou matar cen bois (sacrificio coñecido como hecatombe) para celebrar o descubrimento, ou, máis adiante, I.47, pois como sinalamos antes, a importancia dos *Elementos* foi tal que non era preciso indicar a que libro nos referíamos con este código. Polo que acabamos de contar, o resultado non é obviamente de Euclides, aínda que probablemente sexa súa a demostración que recolle no libro, unha proba abondo enxeñosa na que utiliza un diagrama que a uns lles recorda un muíño de vento, a outros a carapucha dun franciscano, e aos árabes a cadeira na que sentaba a noiva cando a levaban ata o lugar da voda (de feito, algúns refírense a este resultado como o teorema da cadeira da noiva). O teorema de Pitágoras, do que hoxe se coñecen arredor de catrocentas demostracións diferentes, é o cumio deste primeiro libro, que remata probando na proposición corenta e oito o seu recíproco.

Os *Elementos* ao longo da historia

Por desgraza non contamos co texto orixinal dos *Elementos*. De feito, o manuscrito máis antigo de Euclides é do século IX (consérvase na Biblioteca Bodeliana de Oxford), e hai algúns máis, pero non demasiados, dos séculos X, XI e XII. Como adoita acontecer coas obras desta antigüidade, o decurso do tempo fai que se perdan, ben fisicamente ou ben porque nas sucesivas versións os copistas cometen erros ou engaden voluntariamente material da súa propia colleita, e esta acción repetida remata por facer imposible o recoñecemento do texto inicial. No caso dos *Elementos* atopamos copias en grego, árabe, latín e finalmente, xa no Renacemento, foron editándose (ás veces unicamente algúns dos libros e non a obra completa) en linguas vernáculas coma italiano (1543), alemán (1558), francés (1564), inglés (1570) ou español (1574).

Precisamente para levar adiante esta tradución decidimos utilizar coma texto fonte a primeira edición dos *Elementos* (os seis primeiros libros) en español, datada no ano 1574 e publicada en Sevilla no 1576. Deste texto consérvase o manuscrito orixinal e autógrafo na Biblioteca Nacional de España (Ms. 12440). Como argumentos para xustificar a nosa escolla diremos que, ademais de ser a primeira tradución ao castelán dos *Elementos* (probablemente dende un orixinal latino), conta cunha introdución que proporciona ao lector unha información abondo valiosa, non só matemática senón tamén histórica. O seu autor é Rodrigo Zamorano, que se presenta a si mesmo coma *"Astrólogo y Mathemático, y Cathedrático de Cosmographía por su Magestad en la casa de Contratación de Seuilla"*. Trátase dun personaxe respectado na súa época, pois xunto coa cátedra de Cosmografía acadou o cargo de Cosmógrafo fabricante de instrumentos e o de Piloto Maior, e a un tempo un home polémico que soubo conducirse con acerto nun mundo de envexas e odios. Sirvan de exemplos disto último saber que os tres cargos enumerados anteriormente eran incompatibles entre si, ou que o noso tradutor foi quen de, una vez xubilado da cátedra, seguir cobrando o salario a medias co seu sucesor ata a súa norte no ano 1620.

Cómpre dicir que, en conxunto, a tradución de Zamorano é un traballo excelente, aínda que comete o erro de confundir a Euclides o xeómetra co filósofo Euclides de Megara (que é un século anterior), un lapso un tanto estraño pois xa uns anos antes da edición do libro de Zamorano, concretamente nunha tradución latina de Federico Commandino aparecida en 1572, dábase conta desta confusión. Cada enunciado do texto aparece acompañado dunha gráfica que facilita comprender a demostración, a cal aparece en xeral moi ben detallada e xustificada, agás pequenos errores sen importancia que decidimos corrixir para evitar confusións. Polo demais, o noso criterio de tradución foi respectar no posible o texto de Zamorano pero tentando a un tempo que o resultado fora accesible ao lector, para o cal incluímos de cando en vez explicacións dalgúns pasos que non aparecen no orixinal.

Referencias bibliográficas:

Bolyai, J. *Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geométrica*. Apéndice do libro de W. Bolyai *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos*, 1832.

Gille, Bertrand, dir., *Histoire des techniques*, París: Gallimard, 1978 (Enciclopédie de la Plêiade).

Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*, 1899.

Lobachevski, N. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlín, 1840.

Morales, Alfredo J.*, "El cosmógrafo Rodrigo Zamorano, traductor de Alberti al español",* Annali di Architettura: Revista del Centro Internazionale di Studi di Architettura "Andrea Palladio", *7 (1995), pp. 141-146.*

Playfair, J., *Elements of Geometry*, 1795.

Puertas Castaños, María Luisa, tr. e notas, *Euclides. Elementos. Libros I-IV*. Biblioteca clásica Gredos, 1991.

Riemann, B. Über *die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (traballo presentado como memoria de habilitación en 1854 e publicado postumamente en 1868).

Taton, René, *La science modérne de 1450 a 1800*, París: PUF, 1958

-----, *La science contemporaine. Le XIX*^{e}. Siécle, París: PUF, 1961.

[Zamorano, Rodrigo], Los seis primeros libros de la geometría de Evclides. Traducidos en lengua Española por Rodrigo çamorano Astrólogo y Matemático, y Catedrático de Cosmographía por su Majestad en la casa de la Contratación de Seuilla […], Seuilla: en casa de Alonso de la Barrera, 1576. Edición facsímil con estudio introductorio y notas a cargo de José María Sanz Hermida, Salamanca: Universidad de Salamanca, 1999.

EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBRO I

Ao curioso lector

Curioso lector: antes que a Xeometría se reducira ao ser que agora ten andou en uso entre as xentes. Din que os inventores foron os exipcios pola grande necesidade que dela tiñan, pois o río Nilo medraba tanto no verán que a súa crecida lles regaba e ata anegaba todas as leiras, desfacendo e borrando os términos e lindes das herdades de toda a terra. E así sobre o coñecemento do que a cada un logo da estiaxe lle pertencía, había adoito graves preitos e disputas entre os uns e os outros, escollendo cada un para si o máis e o mellor. Por todo isto éralles obrigado cada ano acudir novamente aos xuíces e gobernadores da terra para que os aviñesen. De aquí veu que os xuíces medían polas regras que cada un atopaba máis certas e verdadeiras o que a cada un correspondía. O primeiro en dar regras para a medida foi Merisk, rei de Exipto, ao que se atribúe a invención da xeometría.[1] Logo, a facultade de medir foi mellorando pouco a pouco con novas invencións ata os tempos de Pitágoras, filósofo natural da illa de Samos, o cal inventou nela as liñas, as formas, os intervalos, as distancias e as cantidades; e acadou moitos avances nesta ciencia, entre os cales atopou a virtude ou potencia do triángulo rectángulo, con tanta ledicia e satisfacción propias que, dise del, en agradecemento da mercede recibida ofreceu á deusa Minerva o sacrificio Hecatombe, así chamado entón, no cal sacrificábanse cen vacas.[2] Logo de Pitágoras viñeron moitos homes excelentes nesta facultade e profesión da Xeometría. Entre todos eles destacou Arquímedes, natural de Siracusa, en Sicilia. Foron tamén principais Anaximandro de Mileto e Parménides, o cal, considerando razóns xeométricas, afirmou que a terra era

[1] *Merisk, rei de Exipto*: Nome dado polos gregos ao faraón exipcio Ammenemes III (século XIX antes de Cristo), que organizou un sistema de canles para converter os terreos pantanosos adxuntos ao lago de Meris (ou Moeris) en terras de labor. Xa Herodoto informa sobre isto (*Os nove libros da historia*, II, caps. 148 e 149).

[2] *Hecatombe*: refírese o texto ao sacrificio de cen bois que se celebraba nas festas relixiosas da antiga Grecia en honra de Apolo, Atenea ou Hera. *Pitágoras*: filósofo e matemático grego dos séculos VI e V a. C.

redonda e de figura esférica, e que estaba asentada no medio do universo.[3] O coñecemento da xeometría chegou entón a tal nivel que, por competencia mutua e xeral entre os antigos, estes adicáronse a tratar da Medida, formulando entre eles problemas e preguntas, poñendo por escrito toda cousa que resolvían, de xeito que se comunicaba non só en Exipto, senón tamén, pouco a pouco, entre todas as xentes, afastadas e veciñas. O que máis destacou entre todos foi Euclides, filósofo natural de Megara,[4] en Grecia, que, tomando boa parte daquelas vellas invencións, engadiulles moitas máis coa súa agudeza e sutileza de enxeño. E para que non se perderan os traballos e estudos dos devanceiros, xuntounos todos en quince libros,[5] os cales chamou *Elementos*, porque sendo as figuras desta obra as primeiras demostracións que se fan de Xeometría, todas as demais que desta e das outras ciencias proceden son consecuencia daquelas. E igual que os catro elementos son a base de todas as cousas, así desta obra penden todas as artes e as ciencias que precisan clarisimamente da xeometría.[6] Porque mirando unha por unha, atoparemos que o alicerce que ten a arte da arquitectura é o deseño das plantas e constitución dos alzados dos edificios e, para iso, de onde máis precisa é da xeometría; e así vese claro que por falta desta ciencia caeron moitos edificios, por non terlles dado a forma debida e necesaria. A pintura e escultura, nos seus deseños e debuxos (como indica Alberto Durero no libro *Symmetri corporis humani*, e por Leon Baptista Alberto

[3] *Arquímedes*: Siracusa, 287-212 a. C. Discípulo de Euclides, considerado un dos científicos máis importantes da antigüidade clásica. As súas contribucións atinxen campos como matemática, física, mecánica, astronomía, ou enxeñería, ademais de ser autor de innumerables inventos. Son ben coñecidas algunhas anécdotas sobre a súa vida (o caso da falsa coroa de ouro co que descubriu o principio que leva o seu nome), e frases cono "dádeme outro mundo e un punto de apoio e moverei este" para explicar as posibilidades da panca. De calquera xeito, o descubrimento do que estivo máis orgulloso foi o da relación entre o volume do cilindro e o da esfera, ata o punto que fixo gravar na súa tumba a fórmula descuberta xunto cun debuxo dun cilindro cunha esfera inscrita nel. *Anaximandro de Mileto*: 610-545 a. C.; *Parménides*: Elea, 510-450 a. C. Matemáticos e filósofos gregos do grupo dos presocráticos.

[4] Como xa sinalamos na introdución o autor confunde a Euclides o xeómetra con Euclides o filósofo de Megara, un século anterior.

[5] En realidade só os trece primeiros libros son atribuídos hoxe a Euclides. O libro XIV foi escrito probablemente por Hipsicles (século II a. C.), e o XV considérase obra de Isidoro de Mileto (século VI d. C.).

nos de pintura),[7] teñen tanta necesidade dela que o principal da súa arte está posto e consiste no bo coñecemento da Xeometría sen a que a ningunha cousa das que fan se lle pode dar boa proporción e medida. Mal pode o nivelador de augas traelas ben ao lugar onde precise sen axuda da Xeometría. Nin o enxeñeiro, tanto na guerra como na paz, dará a proporción debida ás súas máquinas sen a Xeometría. O capitán e o soldado, ademais doutras cousas máis que experimentan cada día, precisan da xeometría para organizar axeitadamente o seu escuadrón. O artilleiro tamén mide coa xeometría as distancias ou intervalos de acordo coa potencia das pezas coas que tira e fai as minas para derrubar as fortalezas. Pero a necesidade da Xeometría nótase aínda máis nas ciencias. A Astronomía mal podería probar e demostrar as cantidades e proporcións dos corpos celestiais e da terra para o coñecemento dos movementos e eclipses do sol e da lúa, sen axuda da Xeometría para as demostracións. A aplicación da Xeometría na Astronomía permitiu obter multitude de cousas admirables e sutís que parecen transcender a capacidade humana.

A Cosmografía amosa a utilidade desta ciencia na descrición das provincias e na localización dos lugares, para o que utiliza instrumentos que precisan da Xeometría. A ciencia da Perspectiva proba coa Xeometría todas as súas proposicións, e por medio dela non só investiga e esculca os interiores secretos das obras da natureza, senón tamén

[6] Na filosofía ptolemaica, o universo estaba composto de catro elementos: terra, agua, lume e aire. Véxase Gernot y Hartmut Böhme, *Fuego, agua, tierra, aire. Una historia cultural de los cuatro elementos*, Barcelona: Herder, 1998.

[7]*Alberto* Durero: Pintor e gravador alemán (Nuremberg, 1471-1528); a súa obra *Vier Bücher von menschlicher Proportion* (Nuremberg: Hieronymus Formschneyder, 1528), dividida en catro partes, constitúe o primeiro libro que intenta aplicar a ciencia das proporcións anatómicas á estética. Nas primeiras dúas partes ocúpase das proporcións do corpo humano, a terceira estuda as proporcións do corpo humano empregando regras matemáticas, e na derradeira parte estuda a figura do corpo humano en movemento. Máis información na seguinte páxina web: http://www.nlm.nih.gov/exhibition/historicalanatomies/durer_home.html (Consultada o 24/04/09). Leon *Baptista Alberti:* prototipo de humanista do Renacemento (Xénova, 1404-Roma, 1472), ao mesmo tempo erudito, escritor, arquitecto, escultor, pintor, viaxeiro, cortesán e home de mundo. As súas obras, tanto as escritas (*Descriptio urbis Romae* [1434], *Della pintura* [1436]), como as arquitectónicas (palacio Rucellai, templo do Santo Sepulcro, en Florencia) outorgan á xeometría un posto de especial importancia, e nela cimenta a exactitude das proporcións que caracterizan o seu estilo arquitectónico.

obtén aquela sutil invención dos espellos comburentes.[8] A filosofía natural de Platón, Aristóteles e todos os antigos está ateigada de exemplos xeométricos, de xeito que sen esta ciencia e filosofía é imposible poder hoxe coñecer cousa ningunha. Tamén é clara a necesidade de Xeometría que ten a filosofía natural, pois Aristóteles na *Ética* compara as dúas partes da xustiza, distributiva e conmutativa, coas dúas proporcións, xeométrica e aritmética.[9] Quintiliano considera que a xeometría é necesaria para o orador;[10] e Bartolo para o letrado.[11] En xeral, todas as demais artes e ciencias a necesitan pois unhas, sen ela, non poden pasar, e ás demais élles de grande utilidade, como pode comprobar calquera que se achegue a elas. Foi sempre tan estimada esta ciencia que Platón non permitía aos seus discípulos entrar a estudar filosofía se non sabían primeiro xeometría.[12] Hipócrates escribiu un libro sobre a cuadratura do círculo,[13] Avicena outro de liñas e números,[14] Arquímedes moitos, algúns perdidos polo paso do tempo, e outros aínda están hoxe nas mans dos curiosos; Hipsicles escribiu dous libros de xeometría que tratan da proporción dos cinco sólidos regulares, traducidos ao latín por Severino

[8] Entendemos que o autor se refire ao episodio do asedio de Siracusa do ano 214 antes de Cristo. De acordo coa lenda, Arquímedes, ao que se lle encargou a defensa da cidade, mandou construír espellos cóncavos que concentraban os raios do sol para dirixilos contra as velas das naves invasoras, que non tardaban en incendiarse. Ditos espellos, chamados comburerentes o ardentes, xunto con outras invencións, adiaron a toma da cidade polo xeneral Marcelo. Hoxe hai unha práctica unanimidade en que a historia non é mais que unha lenda, pois nin Arquímedes contaba cos medios técnicos precisos, nin cientificamente se considera posible levar a cabo tal plan.

[9] *Ética a Nicómaco*, I, 9 (xeometría) e II, 6 (aritmética).

[10] Así nas *Institutiones oratoriae*, I, 9, “Da xeometría”.

[11] *Bartolo*: Bártulo de Sasoferrato, xurista italiano (1313-1357): o seu nome acabou convertendose en sinónimo do avogado por antonomasia.

[12] Conta a lenda que no frontispicio da Academia figuraba a seguinte inscrición: “Non entre aquí quen non estea versado en xeometría”.

[13] Hipócrates de Quíos, matemático grego do século V antes de Cristo. O seu método matemático consistía en relacionar un problema ou teorema con outro, de xeito que, solucionando o segundo, resolvía o primeiro. A cuadratura do círculo é unha operación consistente en achar por métodos xeométricos un cadrado de igual área ca dunha circunferencia dada. É un dos tres problemas clásicos da antigüidade, xunto co da duplicación do cubo e a trisección do ángulo. Máis de 2200 anos despois de seren enunciados, probouse que os tres problemas eran insolubles usando unicamente regra e compás. Por esta razón hoxe utilízase a expresión “cuadratura do círculo” para remarcar que algo é imposible.

[14] Avicena, médico e filósofo persa (980-1037), autor de varios libros sobre esas materias nos que, de cando en vez, atópanse reflexións e ideas sobre xeometría.

Boecio xunto con algúns dos quince de Euclides.[15] Apolonio Pergeo adoitaba ser chamado “divino” polos oito libros que escribiu sobre as *Seccións Cónicas*, que ofrecen tal cantidade de sutilezas nos reloxos solares, nos instrumentos matemáticos e sobre todo na delicada e admirable invención do astrolabio.[16] E finalmente, a ninguén podemos considerar douto ou perito na súa ciencia se carece do coñecemento da xeometría, que é a base e fundamento de todas aquelas. Polo tanto, sendo esta ciencia tan antiga como necesaria e nobre, procurei divulgala a todos para que universalmente podan aproveitarse dela en todas as artes e ciencias. Decidín traducir agora unicamente os seis primeiros libros por ser estes máis importantes que os outros. Non quixen poñer neles comentarios, escolios nin addendas (aínda que podería), porque o autor foi nisto tan enxeñoso que o que queira con facilidade pode cunha lectura atenta percibir o sentido e demostración do que el ensina. E aínda que entendo que este pequeno traballo meu será agradábel a moitos, a outros non lles parecerá o mesmo, pois antes de comezar xa opinaron uns ben e outros mal sobre a miña intención. Mais despois, persuadido polos rogos dalgúns amigos e pola necesidade de que este libro estivera na nosa lingua, xa abandonada a tradución, volvín sobre ela ata acabar os seis primeiros libros, que son os máis necesarios dos que Euclides escribiu, parecéndome mellor o proveito que aos uns facía, que non as críticas que por forza teño que sufrir dos demais por parecerlles que traducir as ciencias a lingua vulgar é facelas mecánicas, sen decatarse que os

[15] Eses dous textos de Hipsicles sobre sólidos regulares correspóndense cos libros (apócrifos) XIV e XV de Euclides. Xa que logo, o autor está atribuíndo as dúas obras a Hipsicles e Euclides a un tempo. De calquera xeito, como se indicou en nota anterior, o libro XIV sería de Hipsicles e o XV de Isidoro de Mileto. As *Opera* (Venecia: Johanes et Gregorius de Gregoriis, 1491-1492. 2 vols.) de Anicio Manlio Torcuato Severino Boecio (Roma, 470-542 d. C.) incorporan, en efecto, os libros *De geometría* e *Euclides: Elementae Geometricae*. Pódese consultar unha edición facsímile deste incunable na páxina web da Biblioteca virtual Miguel de Cervantes (http://www.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/12703855314584839543213/index.htm). (Consultada o 27 de abril de 2009).

[16] Apolonio de Pérgamo: matemático e astrónomo grego (séculos III e II antes de Cristo). Ensinou matemáticas en Alexandría. Alcumado “o grande xeómetra”. A súa obra mais importante, *As cónicas*, estende en oito libros os resultados coñecidos sobre seccións cónicas (as curvas que se obteñen cortando un cono por un plano), e xogou un papel moi relevante na Física e na Mecánica celeste. Trátase dun estudo tan profundo que ata 2000 anos despois non se descubriron novas propiedades sobre estas curvas.

autores que ao primeiro as escribiron deixáronas escritas nunha lingua que daquela era tan vulgar como agora é a nosa, e que non buscaron outras alleas nas que escribir porque a súa intención foi máis divulgar a ciencia que non ocultala. Pero aínda que entendo que estas xentes van por mal camiño, non gastarei máis palabras nisto, senón as de encomendar ao curioso lector que valore o meu traballo, e se fora bo aceptarei continuar o que falta de Euclides con outras cousas relativas a Astronomía, Astroloxía e Cosmografía, que entendo gustará aos lectores curiosos. *Vale*.[17]

[17] *Vale*: Forma latina de despedida por medio do imperativo do verbo "ualēre", literalmente 'consérvate bo'.

Libro primeiro de Os Elementos de Euclides filósofo megarense.

Sobre os tres tipos de principios

I.- Definicións

1.- Un punto é o que non ten partes.

2.- Unha liña é unha lonxitude que non se pode ensanchar.

3.- Os extremos dunha liña son puntos.

4.- Unha liña recta é a que directamente está entre os seus puntos.

Liña recta

Liña curva

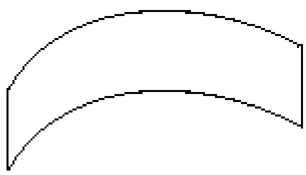
Liña ondulada

5.- Unha superficie é o que unicamente ten lonxitude e anchura.

6.- Os extremos dunha superficie son liñas.

7.- Unha superficie plana é a que está tendida directamente entre as súas liñas.

Superficie plana



Superficie curva

8.- Un ángulo plano é a inclinación de dúas liñas que se cortan sobre unha superficie plana.

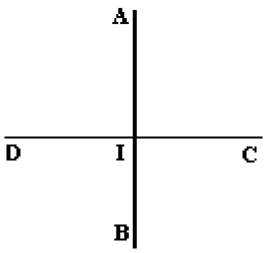
9.- Chámase ángulo rectilíneo cando as liñas que o forman son rectas.

10.- Cando unha liña recta levantada sobre outra igual forme en ambas partes ángulos iguais entre si, é recto cada un destes ángulos, e a liña levantada chámase perpendicular sobre a que está.

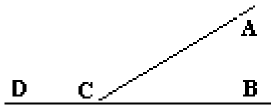
11.- Ángulo obtuso é o maior que un recto.

12.- Ángulo agudo é o menor que un recto.

Ángulo recto



Obtuso Agudo



13.- Extremo é a fin de algo.

14.- Unha figura é a contida entre algún o algúns extremos.

15.- Un círculo é unha figura plana contida nunha liña chamada circunferencia na que todas as liñas que saen dun punto que está dentro e chegan ata a circunferencia son iguais.

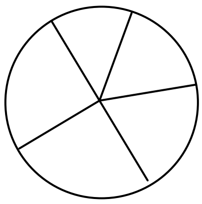
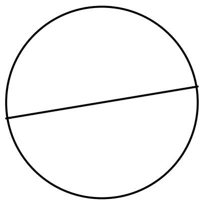
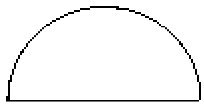
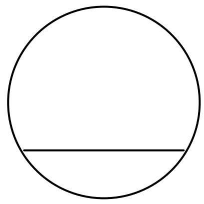
16.- Ese punto chámase o centro do círculo.

17.- Un diámetro do círculo é unha liña recta trazada polo centro e terminada en ambas partes na circunferencia do círculo, dividíndoo en dúas partes iguais.

18.- Un semicírculo é a figura contida entre o diámetro e a circunferencia que con el é cortada.

19.- Un segmento de círculo é a figura contida entre unha liña recta e unha circunferencia de círculo maior ou menor que un semicírculo.

Círculo Diámetro Medio círculo Segmento

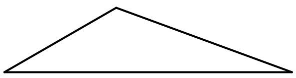
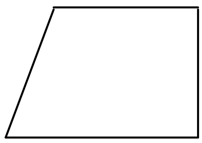
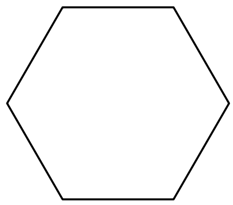
20.- Figuras rectilíneas son as contidas entre varias liñas rectas.

21.- Figuras de tres lados ou trilaterais son as comprendidas por tres liñas rectas.

22.- Figuras cuadriláteras son as comprendidas por catro liñas rectas.

23.- Figuras de moitos lados son as comprendidas por máis de catro liñas rectas.

Trilateral Cuadrilátera De moitos lados

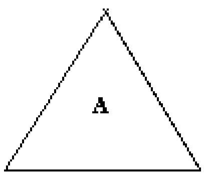




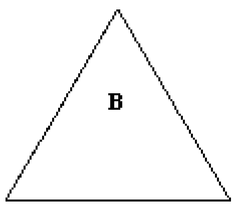
24.- Triángulo equilátero é a figura trilateral contida entre tres lados iguais.

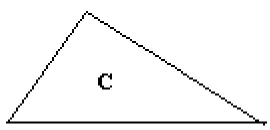
25.- Triángulo isósceles é a figura trilateral na que unicamente hai dous lados iguais.

26.- Triángulo escaleno é a figura trilateral contida entre tres lados desiguais.

Equilátero Isósceles Escaleno





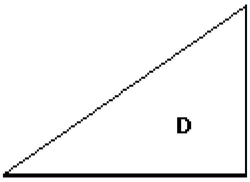


27.- Triángulo rectángulo é a figura de tres lados que ten ángulo recto.

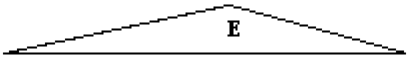
28.- Triángulo obtusángulo é a figura de tres lados que ten ángulo obtuso.

29.- Triángulo acutángulo é a figura de tres lados que ten tres ángulos agudos.

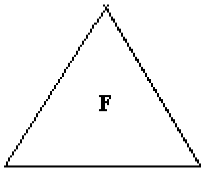
Rectángulo



Obtusángulo



Acutángulo



30.- Cadrado é a figura cuadrilátera que é equilátera e de ángulos rectos.

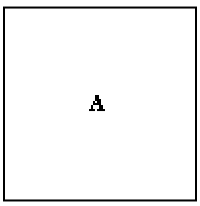
31.- Rectángulo é a figura cuadrilátera de ángulos rectos pero non equilátera.

32.- Rombo é a figura cuadrilátera equilátera, pero de ángulos non rectos.

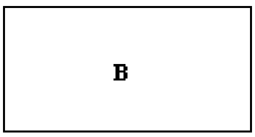
33.- Romboide é a figura cuadrilátera de lados e ángulos contrarios iguais, sen ser equilátera nin ter ángulos rectos.

34.- As demais figuras cuadriláteras chámanse trapecios.

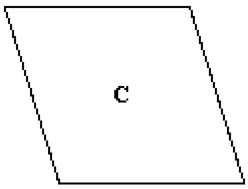
Cadrado



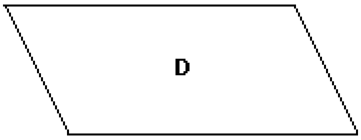
Cuadrángulo



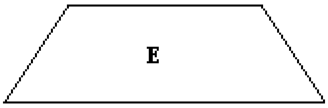
Rombo



Romboide

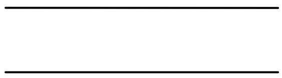


Trapecios



35.- Liñas rectas paralelas son as que estando nun mesmo plano non se cortan nunca.

Paralelas

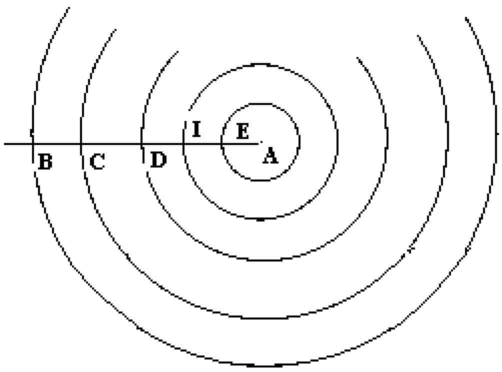


II.- Postulados.

1.- Pódese trazar unha liña recta dende un punto ata outro calquera.

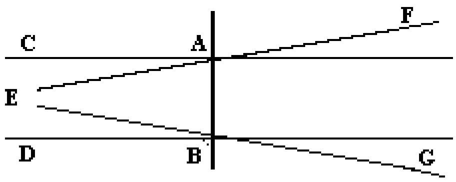
2.- Pódese prolongar unha liña recta continua e directamente.

3.- Pódese describir un círculo dende calquera centro e distancia.



4.- Todos os ángulos rectos son iguais.

5.- Se trazando unha liña recta sobre outras dúas os ángulos interiores do mesmo lado son menores que dous rectos, entón as dúas liñas rectas prolongadas indefinidamente cortaranse no lado onde están os ángulos menores que dous rectos.[18]



III.- Sentenzas comúns.

1.- Dúas cousas iguais a unha terceira son iguais entre si.

2.- Se a cousas iguais engadimos cousas iguais, os resultados serán iguais.

3.- Se de cousas iguais quitamos cousas iguais, os resultados serán iguais.

4.- Se a cousas desiguais engadimos cousas iguais, os resultados serán desiguais.

5.- Se de cousas desiguais quitamos cousas iguais, os resultados serán desiguais.

6.- As cousas que resultan de duplicar outra son iguais entre si.

7.- As dúas metades dunha cousa son iguais entre si.

8.- As cousas que coinciden son iguais entre si.

9.- O todo é maior que a parte.

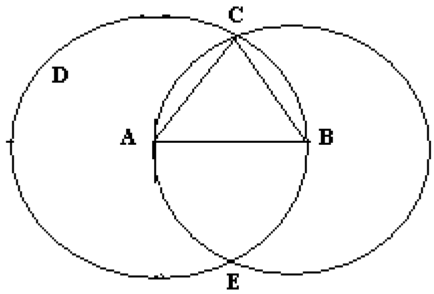
10.- Dúas liñas rectas non pechan superficie.

[18] Véxase o indicado sobre este postulado na introducción.

Problema primeiro, proposición un[19]

Sobre unha liña recta dada finita constrúase un triángulo equilátero.

Sexa a liña recta finita dada AB. Cómpre trazar sobre AB un triángulo equilátero.



Polo terceiro postulado trácese, sobre o centro A e con radio AB, o círculo BCD, e sobre o centro B e con radio BA o círculo ACE.

Polo primeiro postulado, trácese dende o punto C onde se cortan os círculos as liñas rectas CA e CB ata os puntos A e B.

Como o punto A é o centro do círculo CBD as liñas AC e AB serán iguais, pola décimo quinta definición. Do mesmo xeito, como o punto B é o centro do círculo CAE as liñas BC e AB serán iguais, e, polo tanto, as liñas CA e CB son iguais á liña AC. E como, pola primeira sentenza común, as cousas iguais a unha terceira son iguais entre si, a liña AC é igual á liña CB.

Polo tanto, as tres liñas CA, AB e BC son iguais entre si, e o triángulo ABC construído sobre a liña recta dada finita AB será equilátero. Como había que facer.

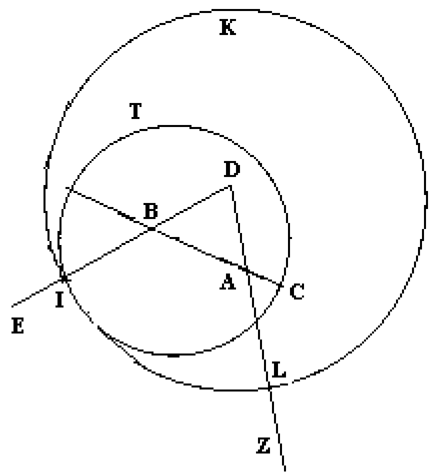
[19] Como sinalamos na introdución, o número de postulados que serían precisos para aceptar todas as demostracións dos *Elementos* é moi superior ao considerado por Euclides. A modo de exemplo, podemos indicar que a demostración desta proposición non é válida sen aceptar un "postulado de continuidade" que xustificaría que os dous círculos construídos se cortan nun punto. (Naturalmente, o feito de que no debuxo sexa evidente non proba nada). Algo semellante acontecerá na demostración da proposición catro, na que o autor superpón dous triángulos. Sería preciso supoñer que unha figura que se despraza por un plano non se deforma.

Problema segundo, proposición dous.

Fixado un punto, constrúase dende el unha liña recta igual a outra dada.

Sexa o punto fixado A e a liña recta dada BC. Cómpre trazar dende o punto A unha liña recta igual á dada BC.

Polo primeiro postulado, trácese dende o punto A ata o punto B a liña recta AB, e sobre ela, pola primeira proposición, constrúase un triángulo equilátero DAB.



Polo segundo postulado, esténdanse DA e DB en liña recta formando as liñas AZ e BE.

Polo terceiro postulado trácese, con centro B e radio BC, o círculo CIT; e con centro D e radio DI o círculo IKL.

Como o punto B é o centro do círculo CIT, a liña BC será, pola décimo quinta definición, igual á liña BI. Pola mesma definición, como o punto D é centro do círculo IKL, a liña DL será igual á liña DI.

Pola proposición anterior, as partes DA e DB desas liñas son iguais e, por tanto, os restos AL e BI desas liñas tamén o son, de acordo coa terceira sentenza común. Pero está demostrado que BC é igual a BI e, por tanto, AL e BC son iguais a BI.

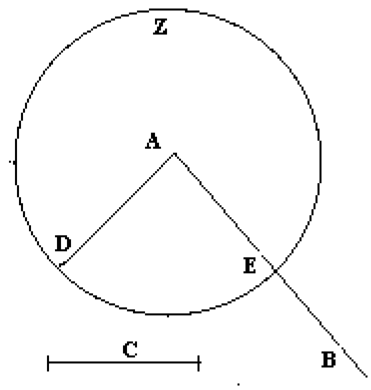
Como, pola primeira sentenza común, as cousas que son iguais a unha mesma son iguais entre si, a liña AL é igual á liña BC; por tanto, dende o punto dado A trazouse a liña recta AL igual á liña dada BC. Como había que facer.

Problema terceiro, proposición tres.

Dadas dúas liñas rectas desiguais córtese da maior outra recta igual á menor.

Sexan dúas liñas rectas dadas desiguais AB e C, sendo AB a maior. Debemos cortar desta unha recta igual a C.

Pola proposición dous, trácese dende o punto A unha liña igual á recta C, e con centro A e radio AD, constrúase, polo terceiro postulado, o círculo DEZ.



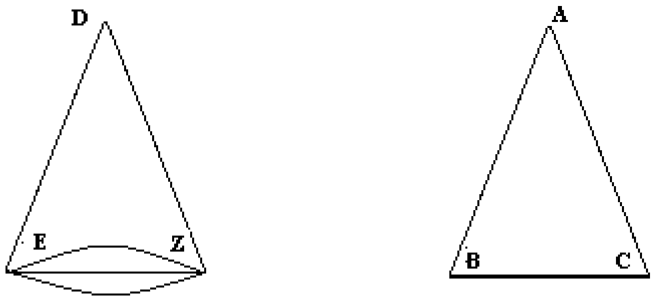
Como o punto A é centro deste círculo, as rectas AD e AE son iguais. Pero C é igual a AD, polo que tamén é igual a AE.

Dadas, pois, as dúas liñas rectas desiguais AB e C, cortouse da maior AB a recta AE, que é igual á recta menor C. Como había que facer.

Teorema primeiro, proposición catro.

Se dous triángulos teñen dous lados da mesma medida e tamén é igual o ángulo comprendido entre eles, entón terán tamén as bases iguais; e un triángulo será igual ao outro. Os restantes ángulos correspondentes serán tamén iguais.

Sexan dous triángulos ABC e DEZ que teñan os lados AB e AC iguais aos lados DE e DZ respectivamente, e o ángulo BAC igual ao ángulo EDZ.



Afirmo que a base BC é tamén igual á base EZ, e o triángulo ABC será igual ao triángulo DEZ, e os restantes ángulos correspondentes serán iguais, isto é: ABC será igual a DEZ e ACB a DZE.

Superpoñendo o triángulo ABC ao triángulo DEZ, e poñendo o punto A sobre D, e a liña recta AB sobre DE, o punto B caerá sobre o punto E, pois a liña AB é igual á DE, por hipótese.

Poñendo a liña AB sobre a liña DE, tamén caerá a recta AC sobre DZ, pois o ángulo BAC é igual ao ángulo EDZ, por hipótese.

Como por hipótese a liña AC é igual a DZ, o punto C caerá sobre o punto Z. Ademais, como o punto C cae sobre Z, e o punto B sobre E, a base BC cae sobre EZ, pois de non ser así, as dúas rectas pecharían unha superficie, o cal é imposible, pola décima sentenza común.

Polo tanto, a base BC cae sobre EZ, e son iguais, de xeito que todo o triángulo ABC cae sobre todo o triángulo DEZ, pola oitava sentenza común, e son iguais; e tamén, pola mesma sentenza, os demais ángulos caen sobre os seus correspondentes, e son iguais; isto é: ABC é igual a DEZ, e ACB é igual a DZE.

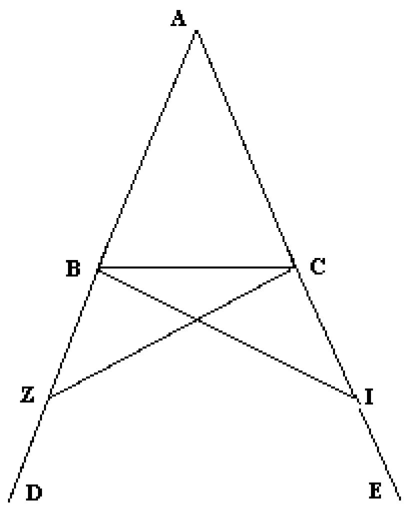
Así pois, cando dous triángulos teñen dous lados da mesma medida e tamén é igual o ángulo comprendido entre eles, entón terán tamén as bases iguais; e un triángulo será igual ao outro. Os restantes ángulos correspondentes serán tamén iguais. Como había que demostrar.

Teorema dous. Proposición cinco.[20]

Os ángulos dos triángulos isósceles que están sobre a base son iguais. Estendidas as dúas liñas rectas iguais, os ángulos que están debaixo da base serán tamén iguais.

Sexa o triángulo isósceles ABC que teña o lado AB igual a AC, e prolonguemos, de acordo co segundo postulado, estes dous lados formando as rectas AD e AE. Afirmo que o ángulo ABC é igual ao ángulo ACB, e o ángulo CBD é igual ao ángulo BCE.

Tómese na liña BD un punto calquera Z e córtese da liña AE, pola terceira proposición, unha liña igual a AZ, que chamaremos AI.



Trácense as liñas ZC e IB.

Como AZ e AI son iguais e tamén o son AB e AC, as liñas ZA e AC son iguais a IA e AB, respectivamente, e pechan o ángulo común ZAI. Logo a

[20] É o teorema coñecido co nome de *Pons asinorum*, “a ponte dos parvos”, por dúas razóns: en primeiro lugar pola semellanza entre o debuxo e unha ponte, pero principalmente porque era a ponte que os malos estudantes non eran quen de cruzar por non entender os razoamentos da proba.

base ZC é, pola cuarta proposición, igual á base IB, e o triángulo AZC será igual ao triángulo AIB.

Os ángulos ACZ e ABI son iguais e tamén o son AZC e AIB; como AZ é igual a AI, e dentro delas AB a AC, o que resta BZ é igual, pola terceira sentenza común, a CI.

Está demostrado que ZC é igual a BI, logo as dúas, BZ e ZC, serán iguais a CI e IB, respectivamente. Pola cuarta proposición, o ángulo BZC é igual ao ángulo CIB e como BC é a base común, os triángulos BZC e CIB son iguais, sendo tamén iguais os ángulos ZBC e ICB, e BCZ e CBI.

Dado que está demostrado que o ángulo ABI é igual a ACZ, e as partes de ambos CBI e BCZ son tamén iguais, pola terceira sentenza común, o ángulo que resta ABC é igual ao ángulo ACB, e están sobre a base do triángulo ABC. Pero o ángulo ZBC é igual a ICB, e ambos están debaixo da base do triángulo ABC.

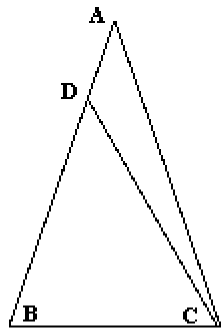
Por tanto, nos triángulos isósceles os ángulos que están sobre a base son iguais entre si e estendidas as dúas liñas rectas iguais, serán tamén iguais entre si os ángulos que están debaixo da base, o cal había que demostrar.

Teorema tres. Proposición seis.[21]

Se os dous ángulos dun triángulo son iguais, tamén o son os lados que os subtenden.

Sexa o triángulo ABC que teña os ángulos ABC e ACB iguais.

Afirmo que tamén o lado AB será igual ao lado AC, porque se non fora así un deles sería maior, por exemplo AB. Nese caso, pola terceira proposición, córtese de AB unha liña igual a AC, que chamaremos DB, e trácese polo terceiro postulado a liña DC.



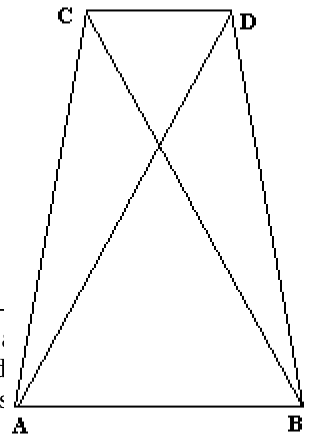
Como o lado DB é igual ao lado AC e a liña BC é común, os dous lados DB e BC son iguais a AC e CB respectivamente, e o ángulo DBC igual a ACB, pola hipótese. Entón, pola cuarta proposición, a base DC é igual á base AB e o triángulo DBC ao triángulo ACB, e dicir, o menor sería igual que o maior, o que é imposible. Por tanto, o lado AB debe ser igual a AC.

Logo se os dous ángulos dun triángulo son iguais entre si, tamén o son os lados que os subtenden. Como había que demostrar.

Teorema catro. Proposición sete.

Sobre unha mesma liña recta non é posible trazar dúas liñas rectas iguais respectivamente a outras dúas dadas, de modo que se corten en dous puntos distintos polo mesmo lado, e tendo os mesmos extremos que as rectas dadas.

Se fora posible trazar sobre unha mesma liña recta AB as liñas rectas AC e CB iguais respectivamente a AD e DB,



[21] É o resultado inverso do anterior. Cando é posible, Euclides ... das proposicións a continuación destas. Este costume de buscar propiedad ... ións necesarias e suficientes) mantense hoxe en día na práctica totalidade dos

que se cortan en dous puntos diferentes

C e D polo mesmo lado, de xeito que CA

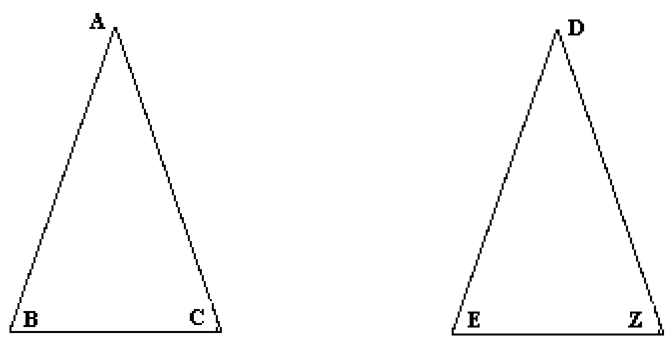
e DA sexan iguais e teñan o mesmo extremo A, e tamén sexan iguais CB e DB tendo o mesmo extremo B, poderíamos trazar, de acordo co primeiro postulado, a recta CD. E como AC é igual a AD, pola quinta proposición, tamén son iguais os ángulos ACD e ADC. Por tanto, o ángulo ADC é menor que BDC, e ACD tamén é menor que BDC. Entón, o ángulo BCD é menor que BDC. E como BC é igual a BD, os ángulos BCD e BDC son tamén iguais. Pero tamén está demostrado que BCD é menor que CDB. As dúas cousas son imposibles.

Logo, sobre unha mesma liña recta non é posible trazar dúas liñas rectas iguais respectivamente a outras dúas dadas, de modo que se corten en dous puntos distintos polo mesmo lado, e tendo os mesmos extremos que as rectas dadas. Como había que demostrar.

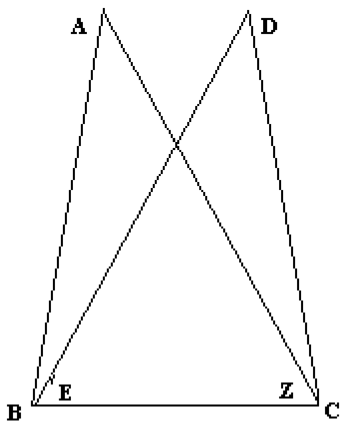
Teorema cinco. Proposición oito.

Se un triángulo ten dous lados e a base iguais aos lados e a base doutro triángulo, entón tamén terán iguais os ángulos correspondentes.

Sexan dous triángulos ABC e DEZ que teñan os lados AB e AC iguais aos lados DE e DZ respectivamente, e que teñan a base BC igual á base EZ.



Afirmo que o ángulo BCA é igual ao ángulo EZD, porque, posto o triángulo ABC sobre DEZ, o punto B sobre o punto E e a recta BA sobre a recta ED, o punto C cae sobre o punto Z, dado que BC é igual a EZ.



Pola mesma razón, as rectas CA e AB caen sobre ZD e DE, respectivamente, pois se a base BA coincide con ED, non coincidindo BC e AC con EZ e DZ, respectivamente, teríamos sobre unha mesma liña recta dúas rectas iguais a outras dadas tales que se cortan en puntos distintos polo mesmo lado, tendo os mesmos extremos. Pero isto non é posible pola proposición sete, logo, coincidindo a base BC coa base EZ, tamén coincidirán os lados BA e AC con ED e DZ respectivamente.

Por tanto, o ángulo BCA será igual a EZD. Logo, se un triángulo ten dous lados e a base iguais aos lados e a base doutro triángulo, entón tamén terán iguais os ángulos correspondentes.

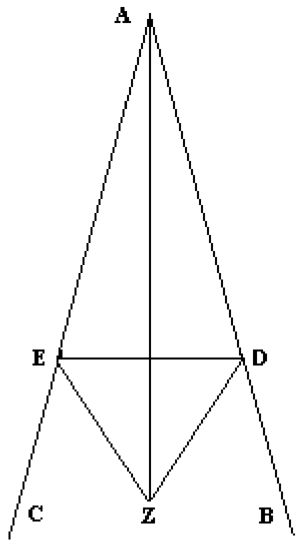
Problema catro. Proposición nove.

Divídase un ángulo rectilíneo dado en dúas partes iguais.

Sexa o ángulo rectilíneo BAC. Convén dividilo en dúas partes iguais.

Tómese na liña AB un punto calquera D, e da liña AC, pola terceira proposición, córtese AE igual a AD, e, polo primeiro postulado, trácese a liña DE e constrúase, pola primeira proposición, un triángulo DZE de lados iguais sobre a base DE.

Polo primeiro postulado, trácese AZ; afirmo que o ángulo BAC é cortado pola liña AZ en dúas partes iguais. Pois AD é igual a AE, e AZ é común; entón DA e AZ son iguais a EA e AZ respectivamente; e a base DZ é igual, pola primeira proposición, á base EZ, logo, pola proposición oito, o ángulo DAZ é igual a ZAE.



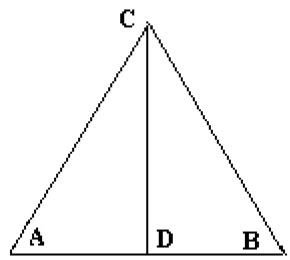
Está, por tanto, dividido en dúas partes iguais coa liña AZ o ángulo dado rectilíneo BAC. Como había que facer.

Problema cinco. Proposición dez.

Divídase en dúas partes iguais unha liña recta dada finita.

Sexa a liña recta finita AB. Convén dividir a liña recta AB en dúas partes iguais.

Pola primeira proposición, constrúase sobre AB o triángulo ABC de lados iguais.



Pola novena proposición, divídase en dúas partes iguais o ángulo ACB mediante a liña recta CD.

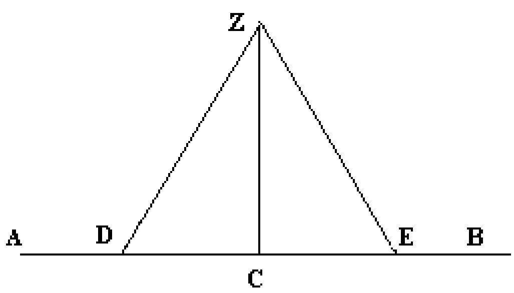
Afirmo que a liña recta AB é cortada en dúas partes iguais no punto D, porque, pola primeira proposición, AC é igual a CB, e CD é común; logo AC e CD son iguais a BC e CD, respectivamente, e o ángulo ACD é igual a BCD. Logo, pola proposición cuarta, a base AD é igual á base DB.

Por tanto, a liña recta finita AB está dividida en dúas partes iguais no punto D. Como había que facer.

Problema seis. Proposición once.

Dada unha liña recta, trácese dende un punto sinalado dela outra recta que forme con ela ángulos rectos.

Sexa a liña recta AB, e sexa C o punto sinalado dela. Convén trazar dende o punto C unha liña recta que forme con AB ángulos rectos.



Tómese en AB un punto calquera D, e trácese, pola terceira proposición, a liña CE igual a DC.

Pola primeira proposición, constrúase sobre DE o triángulo de lados iguais ZDE, e trácese a liña ZC.

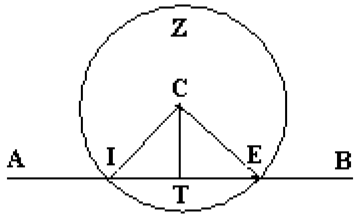
Afirmo que a liña recta ZC forma ángulos rectos coa liña AB, porque como DC é igual a CE, e a liña ZC é común, DC e CZ son iguais a EC e CZ, respectivamente; e a base DZ, pola primeira proposición, é igual á base EZ, logo o ángulo DCZ é igual, pola oitava proposición, ao ángulo ECZ, estando cada un dun lado.

Pola definición dez, cando estando unha liña recta sobre outra formara a cada lado ángulos iguais, cada un destes ángulos é recto; por tanto, os ángulos DCZ e ZCE son rectos, e trazouse a liña recta ZC que forma ángulos rectos con AB dende o punto C sinalado nela.

Problema sete. Proposición doce.

Trácese unha liña recta perpendicular sobre unha liña recta dada infinita dende un punto que non está nela.

Sexa unha liña recta infinita AB, e sexa C o punto dado que non está nela. Convén trazar sobre a liña recta dada infinita AB unha liña recta perpendicular dende o punto C que non está nela.



Tómese nunha parte da recta AB un punto calquera E, e tomando C como centro e CE como distancia, trácese, polo terceiro postulado, o círculo EZI, e córtese, pola proposición dez, EI en dúas partes iguais no punto T.

Polo primeiro postulado, trácense as liñas rectas CI, CE e CT.

Afirmo que a liña recta CT é perpendicular á liña recta dada infinita AB, porque IT é igual a TE, e TC é común, logo IT e CT son iguais a ET e CT respectivamente, e a base CI é igual á base CE, pola definición quince. Logo o ángulo CTI é igual, pola proposición oito, ao ángulo CTE, estando cada un dun lado.

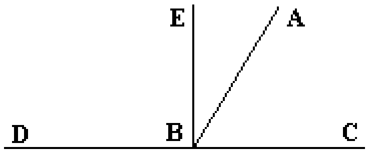
Pola definición dez, cando estando unha liña recta sobre outra formara a cada lado ángulos iguais, cada un destes ángulos é recto e a liña recta que está enriba chámase perpendicular.

Entón, sobre a liña recta dada infinita AB, dende o punto C dado que non está nela, foi trazada a perpendicular CT. Como había que facer.

Teorema seis. Proposición trece.

Cando unha liña recta forma ángulos con outra liña recta, ou ben son dous rectos ou iguais que dous rectos.

Sexa unha liña recta AB que forma sobre a liña recta CD os ángulos CBA e ABD; afirmo que os ángulos CBA e ABD ou son dous rectos ou iguais a dous rectos.



Se o ángulo CBA é igual a ABD, son xa dous rectos, pero se non, trácese, pola proposición once, dende o punto B a liña BE que forma ángulos rectos coa liña CD, de xeito que os ángulos CBE e EBD, pola definición dez, serán rectos.

Como o ángulo CBE é igual aos dous ángulos CBA e ABE, engadíndolles DBE os ángulos CBE e EBD son iguais a CBA, ABE e EBD.

Ademais, como o ángulo DBA é igual a DBE e EBA, engadíndolles o ángulo ABC, os ángulos DBA e ABC son iguais a DBE, EBA e ABC. Pero está probado que tamén os ángulos CBE e EBD son iguais a eses tres, e de acordo coa primeira sentenza común que indica que cousas iguais a unha mesma cousa son iguais entre si, temos que os ángulos CBE e EBD son iguais aos ángulos DBA e ABC. Como CBE e EBD son dous rectos, tamén DBA e ABC son iguais a dous rectos.

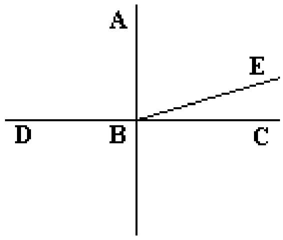
Logo, cando unha liña recta forma ángulos con outra liña recta, ou ben son dous rectos ou iguais que dous rectos. Como había que demostrar.

Teorema sete. Proposición catorce.

Se dende un punto dunha recta trazamos dúas liñas rectas cara a distintos lados tales que os ángulos que formen con ela sexan iguais a dous rectos, entón ambas liñas xuntas constituirán unha recta.

Dunha liña recta calquera AB e dende o punto B trazamos as dúas liñas rectas BC e BD que forman ángulos ABC e ABD iguais a dous rectos; afirmo que a liña BD constitúe con CB unha recta.

Supoñamos que non fora así: sexa BE a liña que forma unha recta con DB. Como a recta AB cae sobre DBE, os ángulos ABD e ABE son iguais a dous rectos, pola proposición trece. Pero



tamén son iguais a dous rectos ABD e ABC, e, por tanto, ABD e ABE son iguais a ABD e ABC.

Quitando o ángulo común ABD o ángulo restante ABE será igual a ABC, é dicir, o menor será igual ao maior, o que é imposible; por tanto, a liña BE non forma unha liña recta con BD. Do mesmo xeito obtemos que ningunha outra liña distinta de BC forma unha recta con DB.

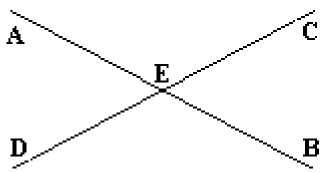
Logo, se dende un punto dunha recta trazamos dúas liñas rectas tales que os ángulos que formen con ela sexan iguais a dous rectos, entón ambas liñas constituirán unha recta. Como había que demostrar.

Teorema oito. Proposición quince.

Se dúas liñas rectas se cortan, os ángulos opostos serán iguais.

Córtense no punto E as dúas liñas rectas AB e CD; afirmo que o ángulo AEC é igual ao ángulo DEB.

Como a liña recta AE cae sobre CD, os ángulos CEA e AED son iguais a dous rectos, pola proposición trece. Ademais, como a liña recta DE cae sobre AB, os



ángulos AED e DEB son iguais a dous
rectos, pola mesma proposición.

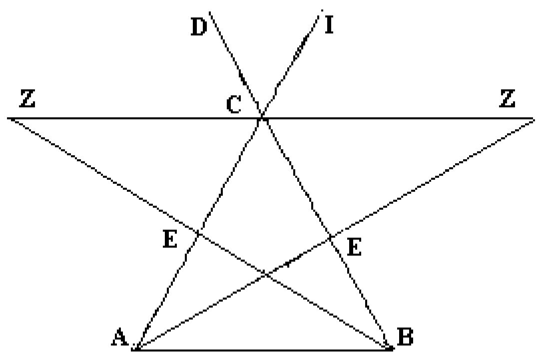
Está probado que os ángulos CEA e AED son iguais a dous rectos, polo que tamén son iguais a AED e DEB. Quitando o ángulo común AED, o ángulo restante CEA será igual a DEB. Do mesmo xeito, próbase que tamén son iguais os ángulos CEB e DEA.

Logo, se dúas liñas rectas se cortan, os ángulos opostos serán iguais entre si. Como había que demostrar.

Teorema nove. Proposición dezaseis.

Prolongado un lado de calquera triángulo, o ángulo exterior é maior que calquera dos ángulos interiores opostos.

Sexa o triángulo ABC e prolónguese o lado BC ata o punto D; afirmo que o ángulo exterior ACD é maior que calquera ángulo interior da parte contraria, é dicir, maior que CBA ou BAC.



Pola proposición dez, córtese no punto E a liña AC en dúas partes iguais.

Prolónguese, polo postulado dous, a liña BE ata o punto Z, e sexa EZ igual a BE.

Trácese ZC, polo primeiro postulado, e esténdase, polo segundo postulado, a liña AC ata o punto I.

Como AE é igual a EC e BE a EZ, temos que AE e EB son iguais a CE e EZ respectivamente, e o ángulo AEB, pola proposición quince, é igual ao ángulo ZEC por seren opostos. Logo pola proposición catro a base AB é igual á base ZC, e os triángulos ABE e ZEC son iguais, sendo tamén iguais os restantes ángulos, polo que BAE é igual a ECZ. Pero o ángulo ECD é maior que ECZ, polo que ACD tamén é maior que BAI.

Do mesmo xeito, se cortamos en dúas partes iguais a liña BC, próbase que o ángulo BCI, é dicir, ACD, é maior que o ángulo ABD.

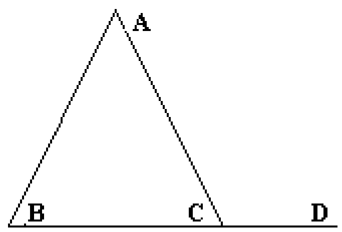
Logo, prolongado un lado de calquera triángulo, o ángulo exterior é maior que calquera dos ángulos interiores opostos. Como había que demostrar.

Teorema dez. Proposición dezasete.

Tomados de calquera forma dous ángulos dun triángulo, son menores que dous rectos.

Sexa o triángulo ABC; afirmo que dous ángulos de ABC tomados de calquera forma son menores que dous rectos.

Prolónguese, polo segundo postulado, o lado BC ata o punto D.



Pola proposición dezaseis, no triángulo ABC o ángulo exterior ACD é maior que o interior ABC. Considérese o ángulo común ACB; entón, os ángulos ACD e ACB son maiores que ABC e ACB, e como pola proposición trece os ángulos ACD e ACB son iguais a dous rectos, temos que ABC e ACB son menores que dous rectos.

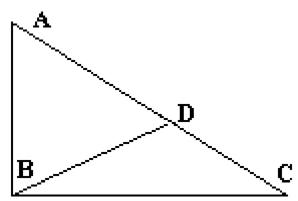
Do mesmo xeito, próbase que tamén os ángulos BAC e ACB son menores que dous rectos, igual que CAB e ABC.

Logo, tomados de calquera forma dous ángulos dun triángulo, son menores que dous rectos. Como había que demostrar.

Teorema once. Proposición dezaoito.

O lado maior de calquera triángulo subtende ao maior dos seus ángulos.

Sexa o triángulo ABC que teña o lado AC maior que o lado AB; afirmo que tamén o ángulo ABC é maior que o ángulo BCA, porque, dado que AC é maior que AB, considérese, pola terceira proposición, a liña AD igual a AB e, polo primeiro postulado, trácese a liña BD.



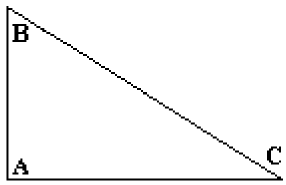
Como do triángulo BDC o ángulo exterior ADB, pola proposición dezaseis, é maior que o ángulo oposto e interior DCB e, pola quinta proposición, os ángulos ADB e ABD son iguais, pois o lado AB é igual ao lado AD, o ángulo ABD é maior que ACB.

Logo o lado maior de calquera triángulo subtende ao maior dos seus ángulos. Como había que demostrar.

Teorema doce. Proposición dezanove.[22]

Debaixo do maior ángulo de calquera triángulo esténdese o maior lado.

Sexa o triángulo ABC que teña o ángulo ABC maior que o ángulo BCA; afirmo que o lado AC é maior que o lado AB, porque, se non fora así, ou ben AC sería igual que AB ou menor; e igual non é, pois nese caso, pola proposición cinco, os ángulos ABC e ACB serían iguais. Entón, AC non é igual que AB.



Tampouco o lado AC é menor que AB, pois nese caso, pola proposición anterior, o ángulo ABC sería menor que ACB, o que non é certo. Entón, AC non é menor que AB; logo, é maior.

Por tanto, debaixo do maior ángulo de calquera triángulo esténdese o maior lado. Como había que demostrar.

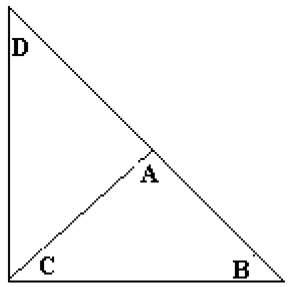
Teorema trece. Proposición vinte.[23]

Dous lados de calquera triángulo tomados xuntos son maiores que o restante.

[22] Aínda que pareza idéntica á proposición anterior, son distintas, pois na primeira o dato de partida é o lado do triángulo, mentres que nesta é o ángulo.
[23] Contan que os epicúreos consideraban este resultado evidente ata para un asno. A xeito de proba dicían que, de colocar comida ao alcance dun burro, (por exemplo, o animal no punto A da figura e a forraxe no B), este aplicaría sen dubidar o teorema, escollendo decote o camiño máis curto (a recta AB) para chegar ao alimento, sen pasar xamais polo punto C.

Sexa o triángulo ABC; afirmo que dous lados do triángulo ABC son maiores que o restante de calquera xeito que se tomen; é dicir: BA e AC son maiores que BC, BC e AB son maiores que AC, e BC e CA son maiores que AB.

Esténdase, polo segundo postulado, BA ata o punto D e, pola segunda proposición, considérese AD igual que AC, e trácese DC.



Como DA é igual a AC, pola proposición cinco, os ángulos ADC e ACD son iguais e, por tanto, o ángulo BCD é maior que ACD.

Como o triángulo DCB ten o ángulo BCD maior que ADC e, pola proposición dezaoito, o lado maior de calquera triángulo subtende ao maior dos seus ángulos, entón DB é maior que BC. Pero DB é igual que AC e AB, logo os lados AC e AB son maiores que BC.

Do mesmo xeito, demóstrase que tamén os lados AB e BC son maiores que CA, e BC e CA son maiores que AB.

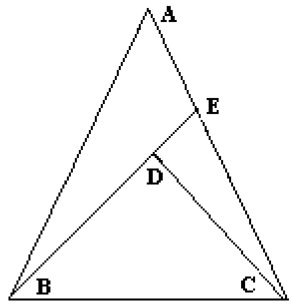
Logo, dous lados de calquera triángulo tomados xuntos son maiores que o restante. Como había que demostrar.

Teorema catorce. Proposición vinte e un.

Se dende os extremos dun lado dun triángulo trazamos dentro del dúas liñas rectas, estas serán menores que os dous lados restantes do triángulo e conterán un ángulo maior.

Se dende os extremos do lado BC do triángulo ABC trazamos dúas liñas rectas BD e CD dentro do triángulo, afirmo que BD e CD son menores que os lados BA e AC, e que o ángulo BDC é maior que BAC.

Esténdase, polo segundo postulado, a liña BD ata o punto E.



Como, pola proposición vinte, dous lados de calquera triángulo xuntos son máis longos que o restante, os lados AB e AE do triángulo ABE son maiores que BE.

Considérese a liña EC. As liñas AB e AC son maiores que BE e EC e, pola proposición vinte, os dous lados CE e ED do triángulo CDE son maiores que DC.

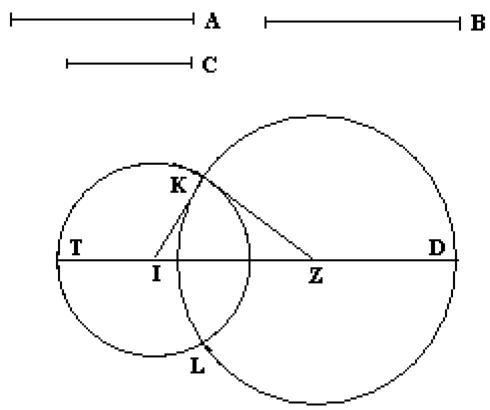
Considerando a liña BD temos que BE e CE son maiores que BD e DC, pero está demostrado que AB e AC son maiores que BE e CE e, por tanto, AB e AC son maiores que BD e DC. Ademais, como pola proposición dezaseis, o ángulo externo de calquera triángulo é maior que o seu oposto interno, o ángulo BDC externo ao triángulo CDE é maior que o ángulo CED, polo que tamén o ángulo externo CEB do triángulo ABE é maior que o ángulo BAC. Pero está demostrado que o ángulo BDC é maior que CEB e, por tanto, tamén é maior que BAC.

Logo, se dende os extremos dun lado dun triángulo trazamos dentro del dúas liñas rectas, estas serán menores que os dous lados restantes do triángulo, e conterán un lado maior.

Problema oito. Proposición vinte e dous.

Constrúase un triángulo de tres liñas rectas iguais a tres dadas, das cales dúas delas, tomadas xuntas de calquera xeito, deben ser maiores que a restante.

Sexan tres liñas rectas dadas A, B e C, tales que, dúas delas, tomadas xuntas de calquera xeito, son maiores que a restante; é dicir: A e B maiores que C; A e C, maiores que B; e C e B, maiores que A. Debemos construír un triángulo con tres liñas rectas iguais a A, B e C.



Dende o punto D, trácese unha recta non terminada pola dirección de T e, pola terceira proposición, considérense as liñas DZ igual a A, ZI igual a B, e IT igual a C.

Polo terceiro postulado, constrúase sobre o centro Z e distancia ZD o círculo LKD, e sobre o centro I e distancia IT o círculo TLK, e trácense, polo primeiro postulado, as rectas ZK e IK. Afirmo que o triángulo KZI está formado por tres liñas rectas iguais a A, B e C.

Como o punto Z é centro do círculo DKL, pola definición quince, ZD é igual a ZK. Dado que A é igual a ZD, pola primeira sentenza común, tamén é igual a ZK.

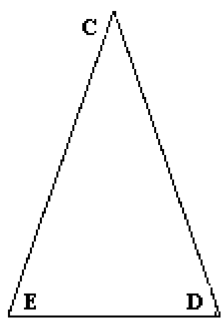
Ademais, como o punto I é centro do círculo LKT, as rectas IK e IT son iguais, e como C é igual a IT, pola primeira sentenza común, tamén é igual a IK. Dado que supuxemos que ZI é igual a B, temos que as tres liñas rectas KZ, ZI e IK son iguais a A, B e C.

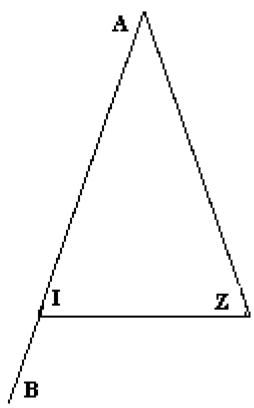
Logo, de tres liñas que son KZ, ZI e IK iguais a tres liñas dadas A, B e C, construímos o triángulo KZI. Como había que facer.

Problema nove. Proposición vinte e tres.

Sobre unha liña recta e nun punto dado nela, constrúase un ángulo de liñas rectas igual a outro dado.

Sexa a liña AB e sexa A o punto dado nela. Considérese o ángulo dado de liñas rectas DCE. Débese poñer na recta dada AB e sobre o punto A, un ángulo de liñas rectas igual a DCE.





Considérense dous puntos calquera D e E nas rectas CD e CE, e trácese, polo primeiro postulado, DE.

Coas tres liñas rectas ZA, ZI e IA, que son iguais a CD, DE e EC, constrúase, pola proposición vinte e dous, o triángulo AZI, de xeito que a liña CD sexa igual a AZ, CE a AI e DE a ZI

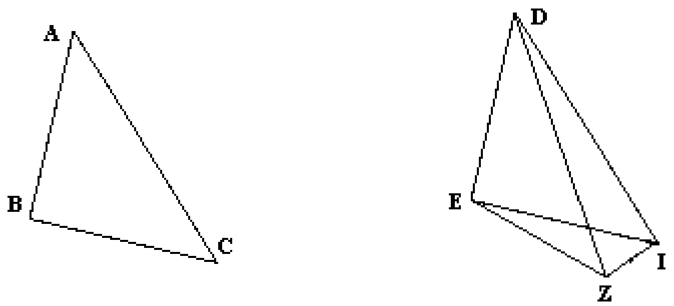
Como as dúas liñas DC e CE son iguais a ZA e AI respectivamente, e a base DE, por hipótese, é igual á base ZI, pola proposición oito, o ángulo DCE é igual ao ángulo ZAI.

Logo, na liña recta dada AB e no punto A construímos o ángulo de liñas rectas ZAI, igual ao ángulo DCE. Como había que facer.

Problema quince. Proposición vinte e catro.

Se dous lados dun triángulo fosen iguais a dous lados doutro, entón o triángulo que teña entre eses dous lados o maior ángulo, terá tamén maior base.

Sexan entón dous triángulos ABC e DEZ que teñan os dous lados AB e AC iguais a DE e DZ respectivamente, pero o ángulo BAC maior que o ángulo EDZ. Afirmo que tamén a base BC é maior que a base EZ.



Dado que o ángulo BAC é maior que EDZ constrúase, pola proposición vinte e tres, na liña recta DE e no seu punto D o ángulo EDI igual a BAC; fágase DI igual a unha das dúas rectas AC ou DZ, e trácense, polo primeiro postulado, IE e ZI.

Como AB é igual a DE e AC a DI as dúas rectas BA e AC son iguais a ED e DI, respectivamente.

Pola proposición vinte e tres, o ángulo BAC é igual ao ángulo EDI. Logo a base BC, pola proposición catro, é igual a base EI. Ademais, como DI é igual a DZ, pola proposición cinco o ángulo DIZ é igual ao ángulo DZI. Por tanto, o ángulo DZI é maior que EIZ, e o ángulo EZI é, por tanto, maior que EIZ.

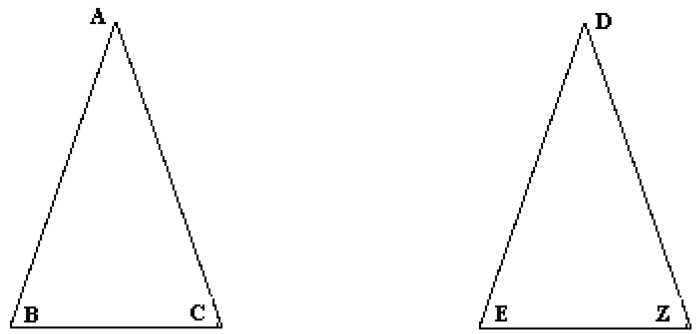
Dado que o triángulo EZI ten o ángulo EZI maior que EIZ e, pola proposición dezanove, o maior ángulo subtende ao maior lado, temos que o lado EI é maior que EZ. Pero EI é igual a BC, logo BC é maior que EZ.

Daquela, se dous lados dun triángulo fosen iguais a dous lados doutro, entón o triángulo que teña entre eses dous lados o maior ángulo, terá tamén maior base. Como había que probar.

Teorema dezaseis. Proposición vinte e cinco.

Se dous lados dun triángulo son iguais a dous lados doutro, entón o triángulo que teña maior base, terá tamén maior o ángulo comprendido entre as dúas rectas iguais.

Sexan dous triángulos ABC e DEZ que teñan os dous lados AB e AC iguais a DE e DZ respectivamente, pero a base BC maior que a base EZ. Afirmo que o ángulo BAC é maior que o ángulo EDZ.



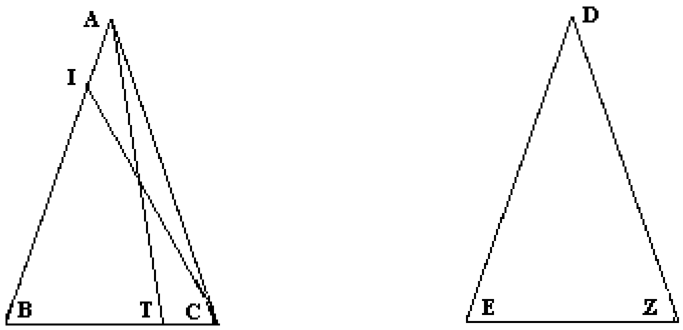
Se non fora así, ou é igual ou é menor; pero iguais non son, pois, nese caso, pola proposición catro, a base BC sería igual á base EZ, e non é así; e tampouco é menor, porque nese caso, pola proposición vinte e catro, a base BC sería menor que EZ.

Daquela, se dous lados dun triángulo son iguais a dous lados doutro, o triángulo que teña maior base, terá tamén maior o ángulo comprendido entre as dúas rectas iguais. Como había que probar.

Teorema dezasete. Proposición vinte e seis.

Se dous triángulos teñen dous ángulos e un lado iguais, son iguais.

Sexan os dous triángulos ABC e DEZ que teñan os ángulos ABC e BCA iguais aos ángulos DEZ e EZD, respectivamente, e o lado BC igual ao lado EZ. Afirmo que os outros dous lados tamén serán iguais, é dicir: AB igual a DE, e AC a DZ, e que o ángulo BAC será igual a EDZ.



Se AB non é igual a DE, un deles será maior que o outro; supoñamos que é AB. Daquela, constrúase, pola terceira proposición, a liña IB igual a DE, e trácese, polo primeiro postulado, IC.

Pola proposición catro, como IB é igual a DE, e BC a EZ, e o ángulo IBC é igual a DEZ, a base IC é igual a base DZ; e o triángulo IBC coincide co triángulo DEZ. Por tanto, os ángulos ICB e DZE son iguais. Pero DZE era igual a BCA, logo, pola primeira sentenza común, BCI sería igual a BCA, o menor ao maior, o cal é imposible. Por tanto, AB non é distinto a DE; será, pois, igual. E tamén BC é igual a EZ, polo que AB e BC son iguais a DE e EZ, respectivamente, e o ángulo ABC é igual a DEZ. Logo, pola proposición catro, a base AC será igual a DZ e os ángulos restantes BAC e EDZ coinciden.

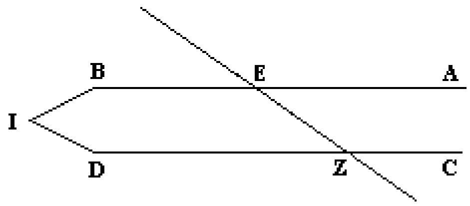
Por outra banda, consideremos iguais os lados AB e DE; afirmo outra vez que os restantes lados tamén serán iguais; é dicir: AC a DZ e BC a EZ. Ademais o ángulo BAC será igual a EDZ, porque se BC é distinto de EZ, un deles será maior; supoñamos que é BC. Daquela, constrúase, pola terceira proposición, a liña BT igual a EZ, e trácese, polo primeiro postulado, AT; como BT é igual a EZ, e AB a DE, e conteñen ángulos iguais, pola proposición catro, a base AT será igual a DZ, e o triángulo ABT coincide con DEZ. Por tanto, os ángulos BTA e EZD son iguais. Pero por hipótese EZD é igual a BCA. Así pois, o ángulo exterior BTA do triángulo ATC é igual ao ángulo interior e oposto BCA, o cal é imposible pola proposición dezaseis. Logo, EZ non é distinto de BC; será, pois, igual. Tamén AB é igual a DE, polo que AB e BC son iguais a DE e EZ, respectivamente, e conteñen ángulos iguais; por tanto, pola proposición catro, a base AC será igual a DZ, o triángulo ABC é igual ao triángulo DEZ; e os ángulos restantes BAC e EDZ coinciden.

Logo, se dous triángulos teñen dous ángulos e un lado iguais, son iguais.

Teorema dezaoito. Proposición vinte e sete.

Se unha liña recta corta a outras dúas formando ángulos alternos iguais, as dúas rectas serán paralelas.

Sexa a liña EZ que corta as rectas AB e CD formando ángulos alternos AEZ e EZD iguais.



Afirmo que AB é paralela a CD, porque de non ser así, prolongando as rectas, cortaranse cara ao lado BD ou AC.

Supoñamos que se cortan no punto I do lado BD; entón, o ángulo exterior AEZ do triángulo IEZ é igual ao ángulo interior e oposto EZI, o que, pola proposición dezaseis, é imposible; logo AB e CD, prolongadas cara ao lado BD, non se cortan.

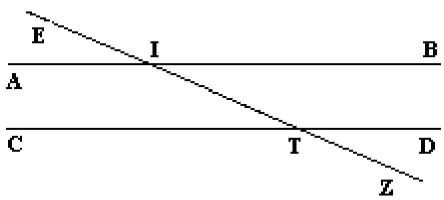
Do mesmo xeito próbase que tampouco se cortan cara ao lado AC, e as liñas que nunca se cortan, pola definición trinta e cinco, son paralelas.

Por tanto, se unha liña recta corta a outras dúas formando ángulos alternos iguais, as dúas rectas serán paralelas.

Teorema dezanove. Proposición vinte e oito.

Se unha liña recta corta a outras dúas formando o ángulo exterior igual ao interior e oposto do mesmo lado, ou os interiores do mesmo lado iguais a dous rectos, entón as dúas rectas serán paralelas.

Sexa unha liña recta EZ que corta a dúas liñas rectas AB e CD formando o ángulo exterior EIB igual ao ángulo interior e oposto ITD ou os interiores do mesmo lado BIT e ITD iguais a dous rectos. Afirmo que a liña AB é paralela a CD.



Como o ángulo EIB, por hipótese, é igual a ITD, e o ángulo EIB, pola proposición quince, é igual a AIT; AIT será igual a ITD, e son alternos, e pola proposición vinte e sete AB é paralela a CD.

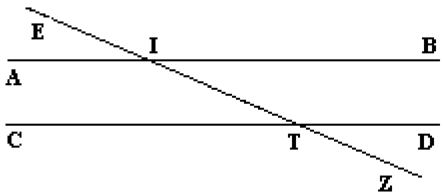
Por outra banda, se, por hipótese, os ángulos BIT e ITD son iguais a dous rectos e os ángulos AIT e BIT, pola proposición trece, son iguais a dous rectos, os ángulos AIT e BIT son iguais a BIT e ITD. Quitando o ángulo común BIT o restante AIT será igual a ITD, e son alternos; logo, pola proposición vinte e sete, AB é paralela a CD.

Por tanto, se unha liña recta corta a outras dúas formando o ángulo exterior igual ao interior e oposto do mesmo lado, ou os interiores do mesmo lado iguais a dous rectos, entón as dúas rectas serán paralelas, que é o que había que probar.

Teorema vinte. Proposición vinte e nove.[24]

Se unha liña recta corta a dúas rectas paralelas, fará os ángulos alternos iguais entre si, e o exterior igual ao interior e oposto do mesmo lado, e os dous interiores do mesmo lado, iguais a dous rectos.

Sexa a recta EZ que corta as rectas paralelas AB e CD. Afirmo que os ángulos alternos AIT e ITD son iguais, e o ángulo exterior EIB igual a ITD, e os interiores do mesmo lado BIT e ITD son iguais a dous rectos.



Porque, se AIT non é igual a ITD, un deles é maior; supoñamos que é AIT, e como AIT é maior que ITD, engadíndolles o ángulo BIT os ángulos AIT e BIT son maiores que ITD e BIT; e os ángulos AIT e TIB, pola proposición trece, son iguais a dous rectos; logo os ángulos BIT e ITD son menores que dous rectos.

Polo quinto postulado, as rectas AB e CD, prolongadas indefinidamente, deben cortarse; pero estas, por seren paralelas, non o fan, por hipótese; entón o ángulo AIT é igual a ITD; e o ángulo AIT, pola proposición quince, é igual a EIB; de onde o ángulo EIB, pola primeira sentenza común, é igual a ITD. Engádaselles BIT; entón os ángulos EIB e BIT son iguais a ITD e BIT, e os ángulos EIB e BIT son iguais a dous rectos, pola proposición trece. Por tanto, BIT e ITD son iguais a dous rectos.

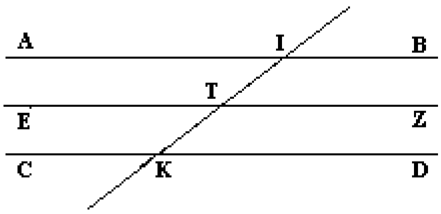
[24] Euclides usa por vez primeira o postulado das paralelas, que evitou ata o de agora á custa de facer en ocasións máis complicadas as probas. Os investigadores ven nisto un signo da súa desconfianza cara a

Daquela, se unha liña recta corta a dúas rectas paralelas, fará os ángulos alternos iguais entre si, e o exterior igual ao interior e oposto do mesmo lado, e os dous interiores do mesmo lado, iguais a dous rectos, que é o que conviña probar.

Teorema vinte e un. Proposición trinta.

As liñas rectas paralelas a outra dada son tamén paralelas entre si.

Sexan AB e CD paralelas a EZ; afirmo que AB é paralela a CD.



Sexa a recta IK que corta as outras tres. Como IK corta as rectas paralelas AB e EZ, pola proposición vinte e nove, o ángulo AIT será igual a ITZ. Ademais, como a recta IK corta as rectas paralelas EZ e CD, pola mesma proposición, o ángulo ITZ é igual a IKD. Está dito que AIT é igual a ITZ, e que IKD é igual a ITZ; logo, AIK é igual a IKD, e son alternos.

Por tanto, AB é paralela a CD, que é o que había que probar.

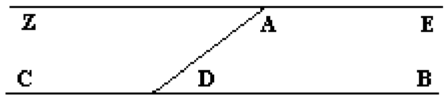
Problema dez. Proposición trinta e un.

Por un punto dado, trácese unha liña recta paralela a unha recta dada.

---

este postulado, aínda que será abondo empregado no que resta deste primeiro libro.

Sexa A o punto dado e BC a liña recta dada. Convén trazar polo punto A unha liña recta paralela a BC.



Tómese un punto calquera D na recta

liña AD, e, pola proposición vinte e tres, constrúase sobre a recta AD e no punto A o ángulo ZAD, igual ao ángulo dado ADB.

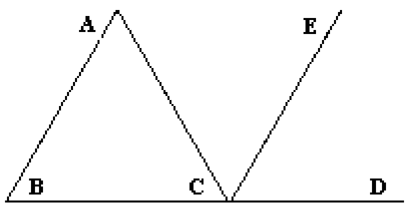
Prolónguese, polo segundo postulado, a liña AZ formando a liña AE. Como a recta AD corta as rectas BC e EZ formando os ángulos alternos ZAD e ADB iguais, pola proposición vinte e sete, EZ será paralela a BC.

Logo, polo punto dado A trazouse a liña recta EZ paralela á recta BC. Como había que facer.

Teorema vinte e dous. Proposición trinta e dous.

Prolongado un lado de calquera triángulo, o ángulo exterior é igual aos dous interiores da parte contraria, e os tres ángulos interiores do triángulo son iguais a dous rectos.

Sexa o triángulo ABC e prolónguese o seu lado BC ata o punto D. Afirmo que o ángulo externo ACD é igual aos dous internos da parte contraria CAB e ABC, e os tres ángulos interiores do triángulo: ABC, CBA e BAC son iguais a dous rectos.



Pola proposición anterior, trácese, polo punto C, a liña recta CE paralela a AB. Como AB é paralela a CE, e a recta AC corta ás dúas, pola proposición vinte e nove, os ángulos alternos BAC e ACE son iguais. Ademais, como AB é paralela a CE e a recta BD corta ás dúas, pola mesma proposición o ángulo exterior ECD é igual ao ángulo interior e oposto ABC. Pero está probado que o ángulo ACE é igual a BAC e, por tanto, o ángulo externo ACD é igual aos dous interiores e opostos BAC e ABC. Engádaselles o ángulo ACB. Entón ACD e ACB son iguais aos tres ángulos ABC, BCA e CAB, pero, pola proposición trece, ACD e ACB son iguais a dous rectos; logo os ángulos ACB, CAB e CBA son iguais a dous rectos.

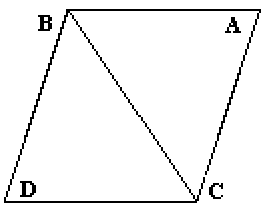
Por tanto, prolongado un lado de calquera triángulo, o ángulo exterior é igual aos dous interiores da parte contraria, e os tres ángulos interiores do triángulo, son iguais a dous rectos. Como conveu demostrarse.

Teorema vinte e tres. Proposición trinta e tres.

As liñas rectas que unen os extremos do mesmo lado de dúas rectas iguais e paralelas son tamén iguais e paralelas.

Sexan as liñas rectas iguais e paralelas AB e CD e sexan AC e BD as rectas que unen os seus extremos de cada lado. Afirmo que AC e BD son iguais e paralelas.

Trácese, polo primeiro postulado, a liña BC. Como AB é paralela a CD, e a recta BC corta ás dúas, pola proposición



vinte e nove, os ángulos alternos ABC e BCD son iguais.

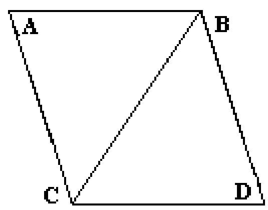
Dado que AB é igual a CD e BC é común, as rectas AB e BC son iguais a CD e BC. O ángulo ABC é igual a BCD, logo a base DB, pola proposición catro, é igual á base AC, e os triángulos ABC e BCD son iguais, e tamén o son os demais ángulos correspondentes. Logo o ángulo ACB é igual a CBD, e como a liña recta BC corta a AC e BD formando os ángulos alternos ACB e CBD iguais, pola proposición vinte e sete, AC é paralela a BD, e está demostrado que son iguais.

Por tanto, as liñas rectas que unen os extremos do mesmo lado de dúas rectas iguais e paralelas son tamén iguais e paralelas. Como conveu demostrarse.

Teorema vinte e catro. Proposición trinta e catro.

Os lados e ángulos opostos dos espazos limitados por lados paralelos son iguais e a diagonal divide eses espazos en dúas partes iguais.

Sexa o espazo de liñas paralelas ACDB e sexa BC a súa diagonal; afirmo que os lados e os ángulos contrarios do espazo de lados paralelos ACDB son iguais entre si, e a diagonal BC o divide en dúas partes iguais.



Dado que AB é paralela a CD e a recta BC corta ás dúas, pola proposición vinte e nove, os ángulos alternos ABC e BCD son iguais; ademais, como AC é paralela a BD e a recta BC corta ás dúas, pola mesma proposición, os ángulos alternos ACB e CBD son iguais; por tanto, os dous triángulos ABC e BCD teñen os ángulos ABC e ACB iguais aos ángulos BCD e CBD, respectivamente, e o lado BC é común aos dous. Logo, pola proposición vinte e seis, o ángulo e os restantes lados correspondentes serán iguais. É dicir, o lado AB é igual a CD, o lado AC a BD e o ángulo BAC a BDC; e como o ángulo ABC é igual a BCD e CBD a ACB, pola segunda sentenza común, ABD é igual a ACD. Pero está probado que o ángulo BAC é igual a BDC, logo os lados e ángulos opostos dos espazos limitados por lados paralelos son iguais.

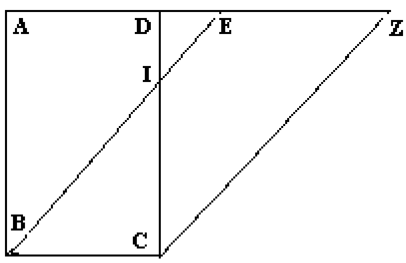
Afirmo tamén que a diagonal o divide en dúas partes iguais, porque AB é igual a CD, e BC é común; por tanto, AB e BC son iguais a CD e BC respectivamente, e o ángulo ABC é igual a BCD, de onde, pola cuarta proposición, a base AC é igual a base BD, e os triángulos ABC e BCD son iguais.

Logo a diagonal BC divide en dúas partes iguais ao paralelogramo ACBD. Como había que probar.

Teorema vinte e cinco. Proposición trinta e cinco.

Os paralelogramos que están sobre a mesma base e entre as mesmas liñas paralelas son iguais.

Sexan os paralelogramos ABCD e EBCZ, que teñen a mesma base BC e están entre as mesmas paralelas AZ e BC. Afirmo que os dous paralelogramos son iguais.



Dado que, pola proposición trinta e catro, AD é igual a BC e EZ a BC, e tamén AD é igual a EZ sendo DE común, AE é igual a DZ.

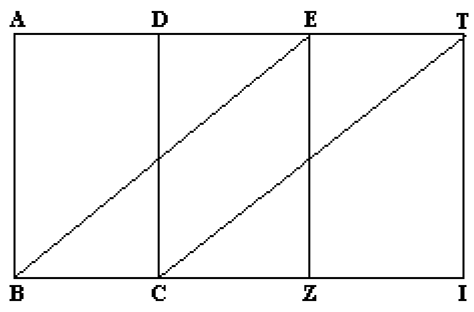
Como AB é igual a DC, AE e AB son iguais a DZ e DC respectivamente, e pola proposición vinte e nove o ángulo externo ZDC é igual ao interno EAB. Daquela, pola proposición catro, a base EB é igual a CZ e os triángulos EAB e ZDC son iguais. Quitando o triángulo común DIE temos que os trapecios EICZ e ABID son iguais. Engadíndolles o triángulo IBC temos que os paralelogramos ABCD e EBCZ son iguais.

Logo, os paralelogramos que están sobre a mesma base e entre as mesmas liñas paralelas son iguais. Como había que probar.

Teorema vinte e seis. Proposición trinta e seis.

Os paralelogramos que teñen bases iguais e están entre as mesmas paralelas son iguais.

Sexan os paralelogramos ABCD e EZIT con bases iguais BC e ZI e entre as mesmas paralelas, AT e BI. Afirmo que os paralelogramos son iguais.



Trácense BE e TC. Como BC é igual a ZI e ZI a ET, tamén BC é igual a ET, e ademais son paralelas e están unidas por BE e CT.

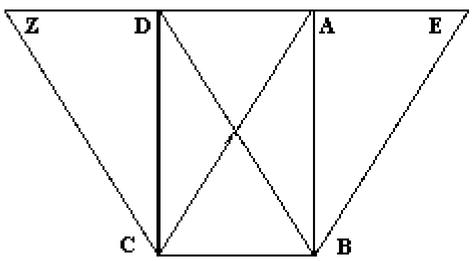
Pola proposición trinta e tres, as liñas que xuntan liñas iguais e paralelas son tamén así, polo que EB e TC son iguais e paralelas. Por tanto, pola proposición trinta e cinco, o paralelogramo EBCT é igual a ABCD, porque ten a mesma base BC, e está entre as mesmas paralelas. Tamén por isto EZIT é igual a EBCT, polo que os paralelogramos ABCD e EZIT son iguais.

Por tanto, os paralelogramos que teñen bases iguais e están entre as mesmas paralelas son iguais.

Teorema vinte e sete. Proposición trinta e sete.

Os triángulos que están sobre a mesma base e entre as mesmas liñas paralelas son iguais.

Sexan os triángulos ABC e DBC postos sobre a mesma base BC e entre as mesmas paralelas AD e BC. Afirmo que os dous triángulos son iguais.



Polo segundo postulado, prolónguese AD a esquerda e dereita ata os puntos Z e E.

Pola proposición trinta e un, trácese dende o punto B a liña BE paralela a CA, e dende o punto C a liña CZ paralela a BD.

Pola proposición trinta e cinco, os paralelogramos EBCA e DBCZ son iguais, porque están sobre a mesma base BC e entre as mesmas paralelas BC e EZ.

Pola proposición trinta e catro, o triángulo ABC é a metade do paralelogramo EBCA, pois a diagonal AB o divide polo medio, e o triángulo DBC é a metade do paralelogramo DBCZ porque a diagonal DC o divide polo medio.

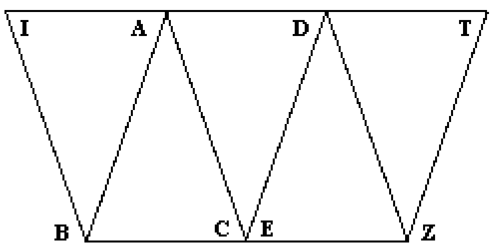
Pola sétima sentenza común, as dúas metades dunha cousa son iguais entre si. Por tanto, o triángulo ABC é igual a DBC.

Logo, os triángulos que están sobre a mesma base e entre as mesmas liñas paralelas son iguais. Como había que probar.

Teorema vinte e oito. Proposición trinta e oito.

Os triángulos que teñen bases iguais e están entre as mesmas paralelas son iguais.

Sexan os triángulos ABC e DEZ con bases BC e EZ iguais e entre as rectas paralelas BZ e AD. Afirmo que os dous triángulos son iguais.



Polo segundo postulado, prolónguese a recta AD a esquerda e dereita ata os puntos I e T, e trácese, aplicando a proposición trinta e un, dende o punto B a recta BI paralela a CA e dende o punto Z a recta ZT paralela a DE. Entón, de acordo coa proposición trinta e seis, os paralelogramos DEZT e IBCA son iguais, pois as súas bases BC e EZ son iguais e están entre as mesmas paralelas BZ e IT.

Pola proposición trinta e catro, o triángulo ABC é a metade do paralelogramo IBCA, pois a diagonal AB o divide polo medio.

O triángulo DEZ é, usando o mesmo argumento, a metade do paralelogramo DEZT, pois a diagonal DZ o divide polo medio.

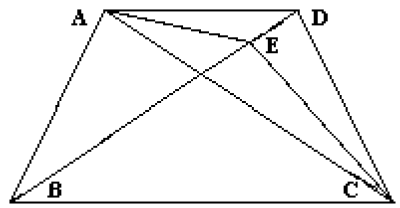
De acordo coa sétima sentenza común as dúas metades dunha cousa son iguais entre si. Por tanto, ABC e DEZ son iguais.

Logo, os triángulos que teñen bases iguais e están entre as mesmas paralelas son iguais. Como había que probar.

Teorema vinte e nove. Proposición trinta e nove.

Os triángulos iguais que están sobre unha mesma base e cara ás mesmas partes están entre as mesmas paralelas.

Sexan os triángulos iguais ABC e DCB sobre a base BC e cara ás mesmas partes. Afirmo que están entre as mesmas paralelas.



De acordo co primeiro postulado, trácese a liña AD; entón AD é paralela a BC. Se non fora así, pola proposición trinta e un poderíamos trazar polo punto A a liña AE paralela a BC e, de acordo co primeiro postulado, a recta EC. Entón, pola proposición trinta e sete, os triángulos EBC e ABC serían iguais por estaren sobre a mesma base BC e entre as mesmas paralelas AE e BC. Pero o triángulo DBC é, por hipótese, igual ao triángulo ABC, logo tamén igual a EBC, é dicir, o maior sería igual ao menor, o que é imposible; por tanto, AE non é paralela a BC.

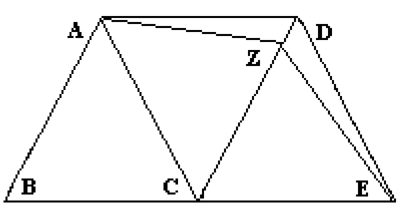
Do mesmo xeito, próbase que ningunha outra, á parte de AD, sería paralela a BC; logo AD é paralela a BC.

Por tanto, os triángulos son iguais e están entre as mesmas paralelas, como había que probar.

Teorema trinta. Proposición corenta.

Os triángulos iguais que están sobre bases iguais e construídos cara ás mesmas partes, están entre as mesmas paralelas.

Sexan os triángulos iguais ABC e CDE con bases BC e CE iguais e construídos cara ás partes A e D. Afirmo que están entre as mesmas paralelas.



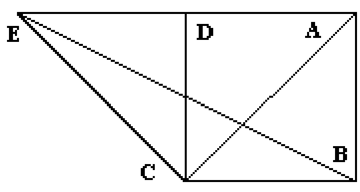
Polo primeiro postulado trácese AD. Afirmo que AD é paralela a BE, porque se non fora así, pola proposición trinta e un, trazaríamos, polo punto A, a liña AZ paralela a BE, e tamén polo primeiro postulado ZE. Entón, pola proposición trinta e oito, os triángulos ABC e ZCE serían iguais por estaren sobre as bases BC e CE iguais, e entre as mesmas paralelas BE e AZ. Pero os triángulos ABC e CDE son iguais, logo o maior CDE sería igual ao menor ZCE, o que é imposible. Por tanto, AZ non é paralela a BE.

Do mesmo xeito próbase que ningunha outra, á parte de AD, sería paralela a BE; logo AD é paralela a BE. Como había que probar.

Teorema trinta e un. Proposición corenta e un.

Se un paralelogramo e un triángulo teñen a mesma base e están entre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobre do triángulo.

Sexa o paralelogramo ABCD e o triángulo EBC coa mesma base BC e entre as mesmas paralelas BC e AE. Afirmo que o paralelogramo ABCD é o dobre do triángulo EBC.



Trácese, polo primeiro postulado, a liña AC; logo, de acordo coa proposición trinta e sete, os triángulos ABC e EBC son iguais, pois están sobre a mesma base BC e entre as mesmas paralelas BC e AE.

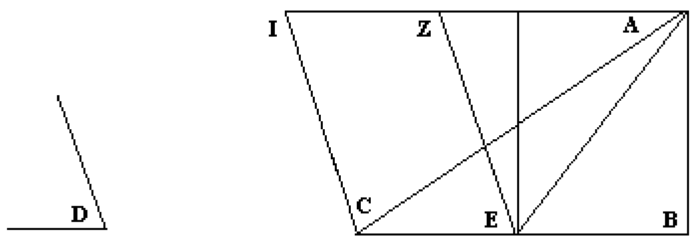
Pola proposición trinta e catro, o paralelogramo ABCD é o dobre do triángulo ABC, pois a diagonal AC o divide en dúas partes iguais, de xeito que o paralelogramo ABCD é o dobre do triángulo EBC.

Por tanto, se un paralelogramo e un triángulo teñen a mesma base e están entre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobre do triángulo, como había que probar.

Problema once. Proposición corenta e dous.

Sobre un ángulo rectilíneo dado, constrúase un paralelogramo igual a un triángulo dado.

Sexa o triángulo ABC e o ángulo rectilíneo dado D; convén, entón, construír nun ángulo rectilíneo igual a D un paralelogramo igual ao triángulo ABC.



Pola proposición dez córtese a liña BC en dúas partes iguais no punto E, e trácese, polo primeiro postulado, a liña AE; e pola proposición vinte e tres constrúase sobre a recta EC e no punto E o ángulo CEZ igual ao ángulo D.

Pola proposición trinta e un trácese polo punto A a recta AI paralela a EC, e polo punto C a recta CI paralela a EZ. Entón ZECI é un paralelogramo, e pola proposición anterior é o dobre do triángulo AEC, pois teñen a mesma base e están entre as mesmas paralelas. Pero, como BE é igual a EC, pola proposición trinta e oito, os triángulos ABE e AEC son iguais, pois están sobre bases iguais BE e EC, e entre as mesmas paralelas BC e AI. Por tanto, o triángulo ABC é o dobre do triángulo AEC.

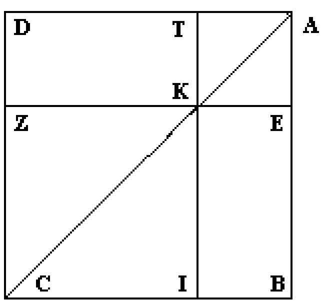
Como o paralelogramo ECIZ e o triángulo AEC están sobre unha mesma base EC e entre as mesmas paralelas EC e AI, o paralelogramo ECIZ é, pola proposición anterior, o dobre do triángulo AEC.

Logo ZECI é igual ao ABC e ten o ángulo CEZ igual a D. Por tanto, construíuse o paralelogramo ZECI igual ao triángulo ABC sobre o ángulo rectilíneo CEZ que é igual ao ángulo D. Como había que probar.

Teorema trinta e dous. Proposición corenta e tres

Son iguais entre si os suplementos daqueles paralelogramos que están na diagonal de calquera paralelogramo.

Sexa o paralelogramo ABCD e sexa AC a súa diagonal na que están os paralelogramos AEKT e ICZK. Sexan os suplementos BIKE e KZDT; afirmo que son iguais.



Pois, como ABCD é un paralelogramo con diagonal AC, pola proposición trinta e catro os triángulos ABC e ADC son iguais.

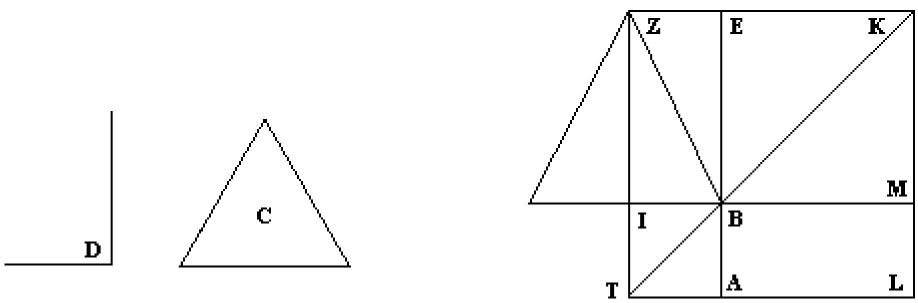
Como AEKT é un paralelogramo con diagonal AK, pola mesma proposición, AEK e ATK son iguais. Do mesmo xeito, tamén os triángulos KZC e KIC son iguais. Por tanto, a unión dos triángulos AEK e KIC é igual a unión de ATK e KZC, e ABC é igual a ADC; logo, pola terceira sentenza común, o suplemento restante BIKT é igual ao suplemento restante ICKZ.

Por tanto, son iguais entre si os suplementos daqueles paralelogramos que están na diagonal de calquera paralelogramo. Como había que probar.

Problema doce. Proposición corenta e catro

Sobre unha liña recta dada nun ángulo rectilíneo dado, constrúase un paralelogramo igual a un triángulo dado.

Sexa AB a liña recta, C o triángulo e D o ángulo rectilíneo dados. Convén construír sobre AB un paralelogramo igual a C nun ángulo igual a D.



Constrúase, pola proposición corenta e dous, o paralelogramo BEZI igual ao triángulo C no ángulo EBI que é igual a D.

Polo segundo postulado, esténdase AB ata E e ZI ata T, e polo punto A, pola proposición trinta e un, trácese a liña AT paralela a BI e EZ.

Polo primeiro postulado, trácese TB.

Como sobre as paralelas AT e EZ cae a liña recta TZ, de acordo coa proposición vinte e nove, os ángulos ATZ e TZE son iguais a dous rectos, de xeito que BTI e IZE son menores que dous rectos, e, polo quinto postulado, as liñas que forman ángulos menores que dous rectos, estendidas ata o infinito, córtanse. Por tanto, esténdanse TB e ZE ata cortarse en K.

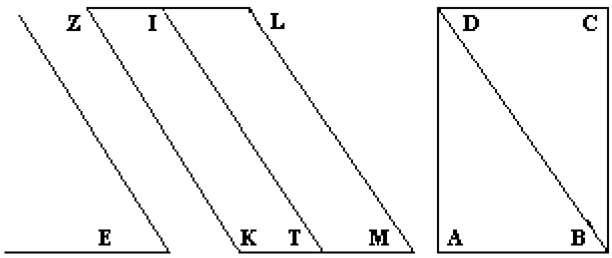
Pola proposición trinta e un, trácese polo punto K a liña recta KL paralela a EA e ZT, e esténdanse, polo segundo postulado, as liñas TA e IB ata os puntos L e M. Entón, TLKZ é un paralelogramo con diagonal KT; na mesma diagonal están os paralelogramos ABIT e MKEB e os suplementos son LMBA e BEZI. Logo, pola proposición corenta e tres, LMBA é igual a BEZI. Pero BEZI é igual ao triángulo C, de maneira que tamén LMBA é igual a C, e como, pola proposición quince, o ángulo ABM é igual a EBI, tamén é igual ao ángulo D. Logo ABM é igual a D.

Por tanto, sobre unha liña recta dada AB está construído o paralelogramo LMBA igual ao triángulo dado C no ángulo ABM, que é igual a D. O que conviña facer.

Problema trece. Proposición corenta e cinco.

Nun ángulo rectilíneo dado, constrúase un paralelogramo igual a unha figura rectilínea dada.

Sexan dados a figura rectilínea ABCD e o ángulo rectilíneo E. Convén construír no ángulo E un paralelogramo igual a ABCD.



Polo primeiro postulado trácese a liña DB e, pola proposición corenta e dous, constrúase no ángulo ITK, que é igual a E, o paralelogramo ZKTI igual ao triángulo ABD.

De acordo coa proposición corenta e catro constrúase sobre a liña recta IT o paralelogramo ITML igual ao triángulo DBC no ángulo TIL, que é igual a E; e como E é igual a ITK e a TIL, tamén son iguais os ángulos ITK e TIL. Engadímoslles o ángulo MTI; entón, os ángulos TIL e MTI son iguais a TKI e MIT, respectivamente, e pola proposición vinte e nove os ángulos TIL e MTI son iguais a dous rectos, polo que ITK e MIT tamén o son. Logo, dende unha liña recta IT e dende o punto T, as rectas KT e TM forman ángulos opostos iguais a dous rectos, de onde, pola proposición catorce, KT e TM están na mesma liña recta.

Como sobre as paralelas KM e ZI cae a liña recta TI, pola proposición vinte e nove os ángulos alternos MTI e TIZ son iguais. Engadímoslles o ángulo TIL; entón, MTI e TIL son iguais a TIZ e TIL, e, pola mesma proposición, os ángulos MTI e TIL son iguais a dous rectos; logo, pola proposición catorce, ZI e IL están na mesma liña recta.

Dado que, pola proposición trinta e catro, KZ é igual e paralela a TI, e ML a TI, pola primeira sentenza común KZ é igual a ML e, pola proposición trinta, paralela; e xuntan as dúas liñas rectas KM e ZL. Logo, pola proposición trinta e tres, KM e ZL son iguais e paralelas. Por tanto, KZLM é paralelogramo, e como, pola proposición corenta e dous, o triángulo ABD é igual ao paralelogramo ZKTI, e o triángulo DBC ao paralelogramo ITML, a figura rectilínea ABCD é igual a KZLM.

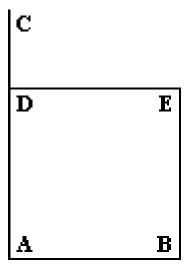
Por tanto, está construído o paralelogramo KZLM igual á figura rectilínea dada ABCD no ángulo KML que é igual ao ángulo dado E. O cal conveu facer.

Problema catorce. Proposición corenta e seis.

Dunha liña recta constrúase un cadrado.

Sexa a liña recta AB. Convén construír un cadrado a partir de AB.

Pola proposición once trácese, dende o punto A, a liña AC que forme ángulos rectos con AB. Pola proposición tres córtese a liña AD igual a AB e, pola proposición trinta e un, trácense, polo punto D, a liña DE paralela a AB, e, polo punto B, a liña BE paralela a AD.



Entón, ADEB é paralelogramo e, pola proposición trinta e catro, AB é igual DE e AD a BE. Pero AB tamén é igual a AD, logo as catro rectas AB, AD, DE e EB son iguais entre si, polo que o paralelogramo ADEB é equilátero.

Afirmo que tamén é rectángulo porque nas paralelas AB e DE cae a liña recta AD, e, por tanto, pola proposición vinte e nove, os ángulos BAD e ADE son iguais a dous rectos. Pero BAD é recto, de onde tamén é recto ADE.

Pola proposición trinta e catro, os lados e ángulos opostos dos espazos paralelogramos son iguais entre si, e, por tanto, os ángulos contrarios ABE e BED son tamén rectos.

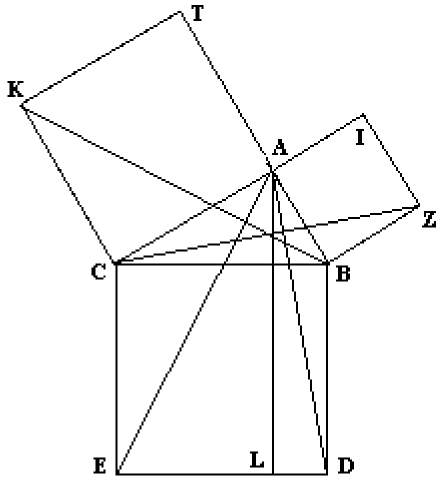
Por tanto, ABED é rectángulo e está demostrado que tamén equilátero; logo, é cadrado e construído a partir da liña AB. O cal había que facer.

Teorema trinta e tres. Proposición corenta e sete.[25]

Nos triángulos rectángulos o cadrado trazado sobre o lado oposto ao ángulo recto é igual aos construídos sobre os lados que conteñen ao ángulo recto.

Sexa o triángulo rectángulo ABC que teña recto o ángulo BAC. Afirmo que o cadrado construído sobre o lado BC é igual aos cadrados construídos sobre BA e AC.

[25] Este resultado, xunto co seu recíproco (a proposición corenta e oito) representan o apoxeo deste primeiro libro dos *Elementos*. Con eles establécese que un triángulo é rectángulo se e só se o cadrado da hipotenusa é igual á suma dos cadrados dos catetos. Aínda que era un resultado coñecido polos antigos babilonios e outras civilizacións anteriores á grega, hoxe é comunmente admitido que Pitágoras foi o primeiro en proporcionar unha proba, polo que pasou á historia co nome de *Teorema de Pitágoras*. Debido a súa importancia, foi coñecido cos máis diversos nomes: teorema da muller casada para os gregos, *magister matheseos* e *inventum hecatombe dignum* na idade media, aludindo neste último caso a lenda que asegura que Pitágoras mandou matar cen bois (sacrificio coñecido como hecatombe) para celebrar o descubrimento, ou, máis adiante, I.47, pois como sinalamos na introdución a importancia dos *Elementos* foi tal que non era preciso indicar a que libro nos referíamos con este código. A proba do teorema recollida nos *Elementos* é moi probablemente do propio Euclides. Nela amosa un debuxo no cal



Constrúase, pola proposición corenta e seis, o cadrado BCED a partir de BC, BAZI a partir de BA e ACKT a partir de AC.

Pola proposición trinta e un trácese polo punto A a recta AL paralela a BD e CE, e polo primeiro postulado constrúanse AD e CZ.

Como os ángulos BAC e BAI son rectos, as dúas liñas rectas AC e AI, trazadas cara a distintas partes dende o punto A da recta AB forman dun e doutro lado ángulos iguais a dous rectos, polo que, pola proposición catorce, AC está en liña recta con AI. Do mesmo xeito, tamén o está BA con AT.

Como o ángulo DBC é igual a ZBA, porque cada un deles é recto, engadíndolles o ángulo ABC, temos que DBA é igual a ZBC, e como AB e BD son iguais a BZ e BC respectivamente, e o ángulo DBA a ZBC, pola proposición catro, as bases AD e ZC son iguais, e o triángulo ABD é tamén igual a ZBC.

Pola proposición corenta e un o paralelogramo BL e o dobre do triángulo ABD porque ten unha mesma base que é BD e está entre as paralelas BD e AL. Pola mesma proposición, o cadrado IB é dobre do triángulo ZBC, porque ten a mesma base BZ e está entre as mesmas paralelas ZB e IC.

---

ao longo da historia cadaquén recoñeceu algo diferente: uns, un muíño de vento, outros a carapucha dun franciscano, e os árabes a cadeira na que sentaba a noiva cando a levaban ata o lugar da voda.

Pola sexta sentenza común as cousas que son o dobre de cousas iguais son iguais entre si, polo que o paralelogramo BL é igual ao cadrado IB.

Do mesmo xeito, polo primeiro postulado, trazando AE e BK próbase que o paralelogramo CL é igual ao cadrado TC, polo que todo o cadrado BCED é igual aos dous IB e TC, e BCED está construído sobre BC e IB e CT sobre BA e AC, de xeito que o cadrado feito sobre BC é igual aos construídos sobre BA e AC.

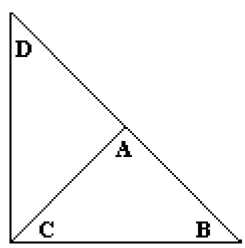
Por tanto, nos triángulos rectángulos o cadrado trazado sobre o lado oposto ao ángulo recto é igual aos dous construídos sobre os lados que conteñen ao ángulo recto. Como había que probar.

Teorema trinta e catro. Proposición corenta e oito.

Se o cadrado construído sobre un dos lados dun triángulo é igual aos construídos sobre os outros lados, entón o ángulo comprendido entre eses lados do triángulo é recto.

Sexa o cadrado construído sobre o lado BC do triángulo ABC igual aos feitos sobre BA e AC. Afirmo que o ángulo BAC é recto.

Pola proposición once trácese dende o punto A a recta AD que forme ángulos rectos con AC. Pola proposición tres, fágase AD igual a AB, e, polo primeiro postulado, trácese DC.



Como DA é igual a AB, o cadrado construído sobre DA é igual ao feito sobre AB. Engadíndolles o cadrado de AC temos que os cadrados de DA e AC son iguais aos de BA e AC.

Pola proposición anterior o cadrado de DC é igual aos cadrados de DA e AC porque o ángulo DAC é recto; pero, por hipótese, o cadrado de BC é igual aos de BA e AC. Por tanto, o cadrado de DC é igual ao de BC e, daquela, o lado DC é igual a BC.

Como AD é igual a AB e AC é común, temos que DA e AC son iguais a BA e AC, e tamén son iguais as bases BC e DC. Así mesmo, pola proposición oito os ángulos DAC e BAC son iguais e, como DAC é recto, tamén o é BAC.

Por tanto se o cadrado construído sobre un dos lados dun triángulo é igual aos construídos sobre os outros lados, entón o ángulo comprendido entre eses lados do triángulo é recto. Como había que demostrar.