Arenarius

Arquímedes

Tradución de José Nicanor Alonso Álvarez
e Miguel Ángel Mirás Calvo

ATG
asociación de
tradutores
galegos

Arenarius

de Arquímedes

José Nicanor Alonso Álvarez
Profesor titular de Álxebra
Universidade de Vigo

Miguel Ángel Mirás Calvo
Profesor titular de Análise Matemática
Universidade de Vigo

Novembro, 2017

Prólogo

A obra $\Psi\alpha\mu\mu\acute{\iota}\tau\eta\varsigma$ (Psammites) de Arquímedes, coñecida como *Arenarius* en latín, e tamén traducida por *O contador de area* en galego, é probablemente o libro de divulgación científica máis antigo da historia. Nel, Arquímedes (con certeza o máis importante científico da súa época), explícalle ao rei Gelón II, tirano de Siracusa, como, contrariamente ao que a xente pensa, o número de grans de area que se precisan para encher o Universo, é finito. Para iso debe, tras estimar o tamaño do Universo, establecer un método que permita expresar números grandes (o sistema de numeración grego non permitía expresar números superiores a cen millóns).

O texto ten tamén un gran valor histórico xa que nos informa dos sorprendentes, por avanzados, coñecementos astronómicos da época. Resulta rechamante comprobar que non só consideraban que a Terra era esférica, e non plana, senón que calcularan o seu perímetro con grande exactitude, séculos antes de que Colón (1436-1506) pensara en chegar ás Indias circunvalando o globo. Ademais, aínda que o modelo do Universo imperante era o xeocéntrico, temos a primeira noticia na historia dun modelo heliocéntrico, pero houbo que agardar a que Copérnico (1473-1543) revolucionara a astronomía moderna formulando a súa hipótese heliocéntrica, na súa grande obra *Sobre as revolucións das esferas celestes*, para que fose universalmente aceptado.

Nesta tradución ao galego utilizamos como texto fonte a versión do libro en inglés realizada por Thomas L. Heath en 1897, incluíndo algúns diagramas e notas a pé de páxina para facilitar a comprensión do texto. Ademais, para completar algunhas pasaxes, consultamos outras versións e traducións do Arenarius como as de Ilian Vardi ao francés, a de Henry Mendell ao inglés, e a de Heinrich F. Fleck ao italiano. Temos que sinalar que na tradución que presentamos recorremos á notación matemática moderna, aínda que o estilo orixinal de Arquímedes era puramente literal.

Arenarius de Arquímedes

(en notación moderna)

Libro I Hai algúns que pensan, rei Gelón,[1] que o número de grans de area é infinito en multitude;[2] e refírome con area non só á que existe sobre Siracusa e o resto de Sicilia senón tamén á que se encontra en cada rexión, sexa habitada ou deshabitada. Tamén hai algúns que, sen consideralo como infinito, aínda pensan que non foi nomeado número ningún abondo grande como para exceder a súa multitude. E está claro que os que sosteñen esta opinión, se imaxinaran unha masa composta de area tan grande como a masa da Terra, incluíndo nela todos os mares e os ocos da Terra, enchidos ata unha altura igual á das montañas máis altas, estarían moitas veces máis lonxe aínda de recoñecer que puidera ser expresado un número que excedera a multitude de area así considerada. Pero eu tentarei mostrarche mediante demostracións xeométricas que serás capaz de seguir que, dos números nomeados por min e dados no traballo que enviei a Zeuxipo,[3] algúns exceden non só ao número da masa de area igual en magnitude á Terra enchida do xeito descrito, senón tamén ao dunha masa de area igual en magnitude ao Universo. Agora, ti es consciente de que Universo é o nome dado pola maioría dos astrónomos á esfera cuxo centro é o centro da Terra e cuxo radio é igual á liña recta entre o centro do Sol e o centro da Terra.[4] Esta é a explicación común, como terás oído dos astrónomos. Pero Aristarco de Samos[5] publicou un libro consistente nalgunhas hipóteses, nas cales as premisas conducen ao resultado de que o Universo é moitas veces maior ca o agora así chamado. As súas hipóteses son que as estrelas fixas e o Sol permanecen inmóbiles, que a Terra xira arredor do Sol na circunferencia dun círculo, o Sol situado

[1] Gelón II, aprox. 266-216 a. de C. Segundo o historiador Plutarco (46-120), Arquímedes estaba emparentado co rei Hierón e o seu fillo o rei Gelón II, tiranos de Siracusa.

[2] Incorporamos na tradución a verba *gran* aínda que non apareza no texto. En realidade Arquímedes trata a area como unha masa, pero está implícito que pode interpretarse como o número de grans de area.

[3] Refírese seguramente ao libro *Sui numeri*, probablemente a versión que deu lugar ao *Arenarius*, que non sería máis que unha popularización deste texto. Por desgraza o traballo foi perdido.

[4] Sorprendentemente neste ensaio Arquímedes utiliza a palabra "Universo" neste senso xeocéntrico, aínda que sabía que algúns planetas e as estrelas non podían estar colocados nesta mesma esfera. En todo caso, como veremos deseguido, Arquímedes adoptará o modelo heliocéntrico de Aristarco, xa que dá lugar a un cosmos moito máis grande.

[5] Astrónomo e matemático grego, 310-230 a. de C.

no centro da órbita, e que a esfera das estrelas fixas, situada arredor do mesmo centro que o Sol, é tan grande que o círculo no cal supón que xira a Terra garda a mesma proporción con respecto á distancia das estrelas fixas que a que o centro da esfera garda coa súa superficie.[6] Agora ben, é doado ver que isto é imposible, pois, como o centro da esfera non ten magnitude, non podemos concibir que teña proporción ningunha coa superficie da esfera. Debemos non obstante considerar que Aristarco quería dicir isto: dado que concibimos que a Terra é, por así dicilo, o centro do Universo, a proporción que garda co que describimos como o Universo é a mesma que a proporción que garda a esfera contendo o círculo no cal el supón que xira a Terra coa esfera das estrelas fixas. Porque adapta as probas dos seus resultados a unha hipótese deste tipo, e en particular parece supoñer a magnitude da esfera na cal representa a Terra movéndose igual ao que chamamos o Universo.[7]

Digo entón que, mesmo se se fixera unha esfera de area, tan grande como Aristarco supón que é a esfera de estrelas fixas, probarei que, dos números nomeados nos *Principios*,[8] algúns exceden en multitude ao número da area que é igual en magnitude á esfera referida, sempre que se fagan as seguintes suposicións.[9]

1. O perímetro da Terra é de aproximadamente 3 000 000 de estadios e non maior.[10] É certo que algúns tentaron probar, como por suposto sabes, que o dito perímetro é de aproximadamente 300 000 estadios.[11] Pero eu vou máis aló e, poñendo a magnitude da Terra en dez veces o tamaño que os meus predecesores pensaron, supoño que o seu perímetro é de aproximadamente 3 000 000 de

[6] No libro de Aristarco que nos chegou, *Dos tamaños e as distancias do Sol e da Lúa*, non se fai mención ningunha ao modelo heliocéntrico que Arquímedes describe. Seguramente sexa unha obra inicial e que Arquímedes coñecese de primeira man as posteriores investigacións de Aristarco, con quen mantiña correspondencia científica. De feito, esta pasaxe do Arenarius é a fonte histórica principal sobre o sistema heliocéntrico de Aristarco.

[7] En astronomía enténdese por paralaxe o desprazamento da posición aparente dun astro na bóveda celeste ao cambiar a posición do observador. Dado que as estrelas parecen estar fixas na bóveda celeste, o modelo heliocéntrico proposto ten que eliminar a paralaxe estelar. Arquímedes supón que $\frac{r_e}{r_u} = \frac{r_u}{r_t}$, onde r_e é o radio da esfera das estrelas fixas, r_u o do Universo e r_t o da Terra. Arquímedes, que necesita para poñer a proba o seu sistema de numeración un valor numérico concreto de r_e, corrixe a Aristarco que supón $r_t = 0$ e, polo tanto, asume un radio da esfera das estrelas fixas infinito.

[8] Traballo perdido de Arquímedes.

[9] Nas medidas astronómicas que seguen, Arquímedes multiplica por un factor de dez a mellor aproximación coñecida na época. Fará sempre suposicións por exceso.

[10] O estadio era unha medida de lonxitude que variaba de valor segundo os lugares e as épocas. De acordo co historiador Plinio estaría entre 148 e 158 metros. A medida do estadio romano era de 185 metros. O estadio ático medía 177, 6 metros. O radio medio da Terra é de aproximadamente $r_t = 6371$ quilómetros, de modo que o perímetro da Terra é de aproximadamente 40 000 quilómetros. Así pois, independentemente do valor que escollamos para un estadio, 3 000 000 de estadios é unha cota superior para o perímetro da Terra que mesmo supera nun factor de 10 ao valor actual.

[11] Mención implícita á célebre medida do perímetro da Terra feita por Eratóstenes de Cirene (230-195 a. de C.), director da biblioteca de Alexandría, con quen probablemente Arquímedes mantiña contacto epistolar.

estadios e non maior.

2. O diámetro da Terra é maior ca o diámetro da Lúa, e o diámetro do Sol é maior ca o diámetro da Terra. Nesta suposición sigo á maioría dos anteriores astrónomos.[12]

3. O diámetro do Sol é aproximadamente 30 veces o diámetro da Lúa e non maior. É certo que, dos anteriores astrónomos, Eudoxo[13] declarou que era aproximadamente nove veces maior, e o meu pai Fidias doce veces, mentres que Aristarco tentou probar que o diámetro do Sol é maior ca 18 veces pero menor ca 20 veces o diámetro da Lúa. Pero eu vou máis aló que Aristarco, para que a verdade da miña proposición poda ser establecida máis alá de calquera disputa, e supoño que o diámetro do Sol é aproximadamente 30 veces o da Lúa e non maior.[14]

4. O diámetro do Sol é maior ca o lado do quilógono[15] inscrito no maior círculo na esfera do Universo.[16]

Fago esta suposición porque Aristarco descubriu que o Sol parecía ser aproximadamente a setecentos vinteava parte do círculo do zodíaco,[17] e eu mesmo tentei, mediante un método que agora describirei, atopar experimentalmente o ángulo subtendido polo Sol e que ten o seu vértice no ollo.[18] Claramente, a medida exacta deste ángulo non é doada pois nin a visión, nin as mans, nin os instrumentos requiridos para medir este ángulo son fiables abondo para medilo con precisión. Pero este non me parece que sexa o lugar para discutir esta cuestión en profundidade, especialmente porque observacións deste tipo foron con frecuencia relatadas. Para os propósitos

[12] Todas estas suposicións son correctas.

[13] Filósofo, astrónomo, matemático e médico, 390-337 a. de C.

[14] As medidas actuais dos diámetros da Lúa e do Sol son, en quilómetros: $d_\ell = 3474$ e $d_s = 1\,392\,000$. Por tanto, $d_s > 400 d_\ell$. Logo esta suposición non é correcta. De feito, non se obtiveron medicións precisas destas magnitudes ata o século XVIII. Os gregos realizaron estas aproximacións baseándose en medicións indirectas, como o tamaño da sombra da Terra durante un eclipse de Lúa, ou o ángulo do triángulo Sol-Terra-Lúa, con vértice na Terra, no momento do cuarto menguante da Lúa. Se consideramos ademais que descoñecían a trigonometría e non dispuñan de táboas de cordas, as medidas dos tamaños relativos do Sol e da Lúa que obtiveron son admirables.

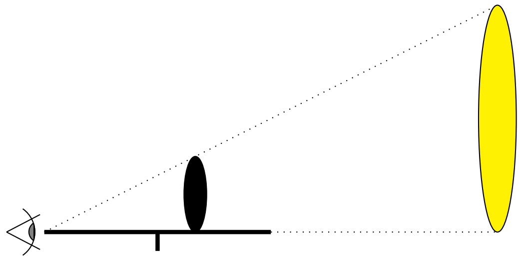
[15] Polígono regular de 1000 lados.

[16] Arquímedes dase por satisfeito adoptando as medidas obtidas polos seus predecesores, convenientemente sobreestimadas, para a circunferencia da Terra, e os tamaños relativos do Sol, a Terra e a Lúa. Non obstante, para o diámetro aparente do Sol decide facer as súas propias observacións.

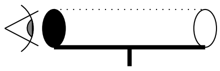
[17] No tratado *Dos tamaños e as distancias do Sol e da Lúa*, Aristarco non supón que o diámetro aparente do Sol é $\frac{1}{720}$ do círculo do zodíaco, é dicir, 0,5°, senón $\frac{1}{15}$ dun signo do zodíaco. Un signo do zodíaco corresponde a $\frac{360°}{12} = 30°$, polo que a medida dada por Aristarco e de 2°, que é unha aproximación moi basta.

[18] O que segue é unha descrición do método experimental usado por Arquímedes para medir o diámetro aparente do Sol. É un fragmento de especial relevancia histórica xa que se trata do primeiro texto que se conserva no que se describe un experimento astronómico, e tamén o primeiro que toma en consideración o corpo humán como instrumento de medida.

da miña proposición, abonda con atopar un ángulo que non sexa maior ca o ángulo subtendido no Sol con vértice no ollo e entón atopar outro ángulo non menor ca o ángulo subtendido polo Sol con vértice no ollo.



Sendo colocada unha regra longa nun soporte vertical situado na dirección de onde nace o Sol, foi posto un pequeno cilindro perpendicularmente á regra para ver o Sol inmediatamente despois do amencer. Entón, estando o Sol no horizonte, podendo velo directamente, foi orientada a regra cara ao Sol e o ollo cara ao extremo da regra. Colocado o cilindro entre o Sol e o ollo, oculta o Sol. Entón o cilindro é afastado do ollo e tan pronto unha pequena porción do Sol comeza a asomar de cada lado do cilindro, é fixado. Se o ollo vira realmente dende un punto, e dende o extremo da regra no que está trazamos tanxentes ao cilindro, estas formarían un ángulo menor ca o ángulo subtendido polo Sol con vértice no ollo. Pero como os ollos non ven dende un único punto, senón dende un certo tamaño, un toma un certo tamaño, de forma redonda, non máis pequeno ca o ollo, e o coloca no extremo da regra onde o ollo foi colocado. Se se trazan tanxentes a este tamaño e ao cilindro, o ángulo entre estas liñas é máis pequeno ca o ángulo subtendido polo Sol con vértice no ollo.



E aquí está o camiño para atopar o tamaño non máis pequeno para o ollo: toma dous pequenos cilindros delgados da mesma anchura, un branco, o outro non, e colócaos fronte ao ollo, o branco a certa distancia, e o outro que non é branco tan preto do ollo como sexa posible sen tocar a cara. Deste xeito, se os cilindros pequenos elixidos son máis pequenos ca o ollo, o cilindro próximo ao ollo é abarcado polo campo visual e o ollo ve o cilindro branco. Se os cilindros son moito máis pequenos, o branco vese completamente. Se non son moito máis pequenos, un ve partes do branco e partes do próximo ao ollo. Pero se un elixe cilindros da anchura axeitada un deles oculta ao outro sen cubrir un grande espazo. É por tanto claro que a anchura dos cilindros producindo este efecto non é máis pequena ca as dimensións do ollo.

Para o ángulo non máis pequeno ca o ángulo subtendendo o Sol con vértice no ollo, fixen como segue: Sendo o cilindro colocado na regra a unha distancia que bloquee ao Sol, se un traza dende o final da regra onde está colocado o ollo liñas tanxentes ao cilindro, o ángulo formado por estas liñas non é máis pequeno ca o ángulo subtendido polo Sol con vértice no ollo. Sendo medido un ángulo recto polos ángulos collidos deste xeito, encóntrase que o ángulo colocado no punto é a cento sesenta e catroava parte dun ángulo recto, mentres que se atopa que o ángulo máis pequeno é máis grande ca a ducentésima parte dun ángulo recto.[19] É por tanto claro que o ángulo subtendido polo Sol con vértice no ollo é tamén máis pequeno ca unha cento sesenta e catroava parte dun ángulo recto, e máis grande ca unha ducentésima parte dun ángulo recto.[20]

Unha vez completadas estas medicións, probaremos que o diámetro do Sol é maior ca o lado dun quilógono, ou figura con mil lados iguais, inscrito no gran círculo do Universo.[21] Imaxinemos o plano que pasa polo centro do Sol, o centro da Terra e o ollo, no momento que o Sol acaba de elevarse por riba do horizonte. Deixemos que o plano corte á Terra no círculo EHL e ao Sol no círculo FKG, sendo os centros da Terra e do Sol C e O, respectivamente, e sendo E a posición do ollo. Ademais, deixemos que o plano corte á esfera do Universo, é dicir, a esfera cuxo centro é C e ten radio CO, no gran círculo AOB. Tracemos dende E dúas tanxentes ao círculo FKG tocándoo en P e Q, e dende C tracemos outras dúas tanxentes ao mesmo círculo tocándoo en F e G, respectivamente. Deixemos que CO se encontre coas seccións da Terra e do Sol en H e K, respectivamente; e deixemos que CF e CG se encontren co gran círculo AOB en A e B. Unamos EO, OF, OG, OP, OQ, AB, e deixemos que AB se encontre con CO en M.[22]

Agora $CO > EO$, pois o Sol está xusto enriba do horizonte. Por tanto o ángulo $\measuredangle(PEQ)$ é maior ca o ángulo $\measuredangle(FCG)$.[23] Pero o ángulo $\measuredangle(PEQ)$ é maior ca $\frac{1}{200}\mathcal{R}$

---

[19] Arquímedes non explica como determinou estes ángulos.

[20] A medida do diámetro aparente do Sol, $\mathcal{D}$, non se presenta como un valor fixo, senón dando un erro experimental en forma dunha cota inferior e unha cota superior. Se $\mathcal{R}$ é un ángulo recto entón

$$\tfrac{1}{200}\mathcal{R} < \mathcal{D} < \tfrac{1}{164}\mathcal{R}.$$

Así pois, Arquímedes deduce que o diámetro aparente do Sol está entre $27'$ e $32'56''$. Actualmente acéptase que o diámetro aparente do Sol oscila durante o ano entre $31'3''$ e $32'35''$. Logo as cotas son correctas.

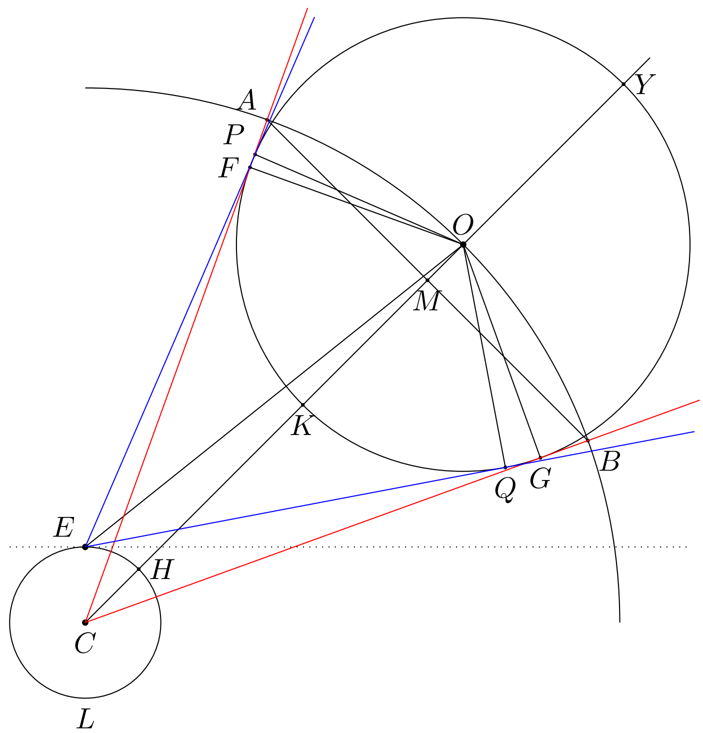
[21] O que segue ata o final do Libro I é o primeiro exemplo que se conserva no que se consideran os efectos da paralaxe. Arquímedes ten en conta a paralaxe solar para o cálculo da distancia da Terra ao Sol, o radio do Universo. As cotas do diámetro aparente do Sol obtidas no experimento foron tomadas dende un punto da superficie da Terra. Agora Arquímedes obtén que as correspondentes cotas medindo o diámetro aparente do Sol dende o centro da Terra, $\mathcal{D}_t$, son:

$$\tfrac{1}{203}\mathcal{R} < \mathcal{D}_t < \tfrac{1}{164}\mathcal{R}.$$

De feito, dados os seus propósitos, só mellora a cota inferior.

[22] En xeral, denotaremos por $\measuredangle(BAC)$ o ángulo agudo determinado polos puntos A, B e C con vértice no punto A. Así pois, o diámetro aparente do Sol visto dende o punto E na superficie da terra é $\mathcal{D} = \measuredangle(PEQ)$; o diámetro aparente do Sol visto dende o centro da Terra C é $\mathcal{D}_t = \measuredangle(FCQ)$; e CO é o radio do Universo.

[23] Os triángulos rectángulos COF e EOP teñen un cateto común, o radio do Sol. Logo, o diámetro



e menor ca $\frac{1}{164}\mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ representa un ángulo recto, xa que é o ángulo subtendido polo Sol con vértice no ollo. Consecuentemente,

$$\measuredangle(FCG) < \measuredangle(PEQ) < \frac{1}{164}\mathcal{R},$$

e o segmento AB é menor ca a corda do sector circular que é a $\frac{1}{656}$ parte do gran círculo do Universo.[24] Agora, o perímetro de calquera polígono inscrito no gran círculo é menor ca $\frac{44}{7}CO$, xa que a razón entre o perímetro de calquera polígono inscrito nun círculo e o radio do círculo e menor ca $\frac{44}{7}$. Sabes, de feito, que demostrei que en calquera circunferencia o perímetro é máis grande, nun factor menor ca unha sétima parte, ca o triple do diámetro, e que o perímetro do polígono inscrito é menor

aparente do Sol medido dende o centro da Terra é menor ca o medido dende a superficie.

[24]Dado que $\mathcal{R}$ é un ángulo recto, é dicir, a cuarta parte dunha circunferencia, temos que $\frac{1}{164}\mathcal{R} = \frac{1}{4\cdot 164} = \frac{1}{656}$ partes dunha circunferencia. Esta é a cota superior do tamaño aparente do Sol visto dende C.

ca o da circunferencia.[25] Por tanto $\frac{AB}{CO} < \frac{11}{1148}$ e, *a fortiori*,[26]

$$AB < \frac{1}{100} CO. \tag{1}$$

Pero o diámetro do Sol é igual a AB, dado que a metade desta distancia, AM, coincide con FO, que é o radio do Sol. En efecto, os segmentos $CA = CO$ son iguais e AM é perpendicular a CO, mentres que OF é perpendicular a CA.[27] Entón, por (1), o diámetro do Sol é menor ca $\frac{1}{100}CO$. Agora, o diámetro da Terra é menor ca o diámetro do Sol, como supuxemos na segunda hipótese, polo que o diámetro da Terra tamén é menor ca $\frac{1}{100}CO$. Por tanto $CH + OK < \frac{1}{100}CO$, de xeito que $HK > \frac{99}{100}CO$, ou sexa $\frac{CO}{HK} < \frac{100}{99}$. Pero $CO > CF$ mentres que $HK < EQ$. Por tanto

$$\frac{CF}{EQ} < \frac{100}{99}. \tag{2}$$

Agora, como nos triángulos rectángulos CFO e EQO, os catetos OF e CF son iguais, $OF = OQ$, e os outros EQ e CF distintos, sendo $EQ < CF$ pois $EO < CO$, temos que $\measuredangle(OEQ) < \measuredangle(FCO)$ e

$$\frac{CO}{EO} < \frac{\measuredangle(OEQ)}{\measuredangle(FCO)} < \frac{CF}{EQ}.$$

Porque, se dous triángulos rectángulos teñen un cateto da mesma lonxitude e os outros dous catetos distintos, entón o ángulo grande oposto aos lados distintos ten co menor dos ángulos unha razón maior ca a razón ca a maior hipotenusa ten coa menor, pero menor ca a razón ca o cateto máis longo ten ca o máis curto.[28]

---

[25] O perímetro do polígono regular de $n > 3$ lados inscrito nunha circunferencia de radio r, P_n^r, é menor ca a lonxitude de dita circunferencia, C_n^r. Por tanto, $P_n^r < C_n^r = 2\pi r$. Logo, $\frac{P_n^r}{r} < 2\pi$. Arquímedes no seu libro *Sobre a medida dun círculo* demostrou certamente que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, ou sexa, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Polo tanto, en efecto, $\frac{P_n^r}{r} < \frac{44}{7}$.

[26] Claramente, $\frac{44}{7 \cdot 656} = \frac{44}{4592} = \frac{11}{1148} < \frac{1}{100}$.

[27] Os triángulos rectángulos CFO e CMA teñen como hipotenusa o radio do Universo, $CO = CA$, e o ángulo agudo no vértice C é o mesmo para ambos triángulos. Entón, CFO e CMA son triángulos congruentes e, polo tanto, $FO = AM$. Pero FO é o radio do Sol e M é o punto medio da corda AB, de onde deducimos que o diámetro del Sol coincide con AB.

[28] Arquímedes fai uso dun resultado, coñecido hoxe en día como a desigualdade de Aristarco, que a emprega, sen demostrala, no seu tratado *Dos tamaños e as distancias do Sol e da Lúa*. En terminoloxía moderna, o resultado establece que se $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ entón

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}.$$

Trátase dunha proposición notable para a época, xa que a trigonometría aínda non fora inventada. Observemos que a desigualdade de Aristarco equivale a afirmar que a función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ é decrecente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ e que a función $g(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ é crecente no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Duplicando os ángulos, e tendo en conta (2),

$$\frac{\measuredangle(PEQ)}{\measuredangle(ACB)} < \frac{CF}{EQ} < \frac{100}{99}.$$

Pero, por hipótese, $\measuredangle(PEQ) > \frac{1}{200}\mathcal{R}$ co que,[29]

$$\measuredangle(ACB) > \tfrac{99}{20\,000}\mathcal{R} > \tfrac{1}{203}\mathcal{R}.$$

Resulta que a corda AB é maior ca a corda do arco obtido ao dividir a circunferencia do círculo grande AOB en oitocentas doce partes.[30] Pero a corda AB é igual ao diámetro do Sol. Logo é evidente ca o diámetro do Sol é maior ca o lado do quilógono inscrito no círculo grande do Universo.

[29] O número 203 é o menor natural n tal que $n \cdot 99 > 20000$. Arquímedes chega finalmente a unha cota inferior do diámetro aparente do Sol visto desde o centro da Terra.

[30] Xa que $4 \cdot 203 = 812$.

Libro II Unha vez feitas as anteriores suposicións, poden establecerse os seguintes resultados: que o diámetro do Universo é menor ca 10 000 veces o diámetro da Terra e que, ademais, o diámetro do Universo é menor ca 10 000 000 000 de estadios.

Supoñamos, por brevidade, que d_u representa o diámetro do Universo, d_s o do Sol, d_t o da Terra, e d_ℓ o da Lúa. Na terceira hipótese establecimos que $d_s \leq 30d_\ell$, e na segunda que $d_t > d_\ell$, por tanto $d_s < 30d_t$. Dado que demostramos que d_s é maior ca o lado do quilógono inscrito no círculo grande do Universo, deducimos que o perímetro do quilógono inscrito é menor ca $1000d_s$ e entón menor ca $30\,000d_t$. Pero o perímetro de calquera polígono regular con máis de 6 lados inscrito nun círculo é maior ca o do hexágono regular inscrito, e por tanto maior ca tres veces o diámetro.[31] Así pois, o perímetro do quilógono inscrito no círculo do Universo é maior ca $3d_u$. Séguese que $d_u < 10\,000d_t$.[32]

Na primeira hipótese supuxemos que o perímetro da Terra é menor ca 3 000 000 de estadios. Pero o perímetro da Terra é maior ca $3d_t$, xa que o perímetro dunha circunferencia é maior ca o triple do seu diámetro.[33] Por tanto $d_t < 1\,000\,000$ de estadios, de onde $d_u < 10\,000\,000\,000$ de estadios.

Ata aquí as miñas suposicións no que atinxe aos tamaños e as distancias. En relación á area farei as seguintes. Que se temos unha cantidade de area cun volume non maior cunha semente de papoula, o número de grans de area contidos non excederá de 10 000, e que o diámetro da semente de papoula non é menor ca a corenteava parte da anchura dun dedo. Cheguei a esta hipótese facendo este experimento: coloquei sobre unha regra ben pulida sementes de papoula formando unha ringleira, cada unha tocando á seguinte. Vinte e cinco sementes ocuparon un espazo maior ca o ancho dun dedo. Farei a suposición de que o diámetro das sementes é aínda máis pequeno e que é aproximadamente unha corenteava parte da anchura dun dedo co propósito de eliminar calquera posibilidade de crítica á proba da miña proposición.[34]

[31] Recordemos que o lado dun hexágono regular coincide co radio da circunferencia que o inscribe. Denotemos por P_n^r o perímetro do polígono regular de n lados inscrito nunha circunferencia de radio r. Arquímedes establece a seguinte cadea de desigualdades: $P_{1000}^{r_u} < 1000d_s < 30\,000d_\ell < 30\,000d_t$ e $P_{1000}^{r_u} > P_6^{r_u} = 3d_u$.

[32] Os valores actuais son, en quilómetros: $d_t = 12\,742$ e $d_u = 299\,195\,741$. Logo $d_u > 20\,000d_t$. Recordemos que o diámetro do Sol foi notablemente subestimado polos astrónomos gregos.

[33] A lonxitude L dunha circunferencia de diámetro d ven dada por $L = \pi d$, e xa vimos que Arquímedes establecera que $\pi > 3\frac{10}{71} > 3$.

[34] Se supoñemos que o ancho dun dedo é de 20 milímetros, o diámetro dunha semente de papoula segundo Arquímedes sería de 0,5 milímetros. Una esfera deste diámetro ten un volume de $\frac{\pi}{6}(0{,}5)^3 = 0{,}0654$ milímetros cúbicos. Se este volume contén 10 000 grans de area entón cada gran debe ter un volume de 0,00000654. Por tanto cada gran de area debería ter un diámetro de $\frac{0{,}5}{\sqrt[3]{10\,000}} = 0{,}0232$, algo inferior a 0,025 milímetros. Eses grans serían tan finos que dificilmente poderían verse a simple vista. De novo Arquímedes, como el mesmo expresa, toma os valores que precisa cunha ampla marxe de erro para evitar calquera dúbida sobre o seu razoamento.

Libro III Estas son pois as miñas hipóteses. Mais creo que será de utilidade recordar como se nomean os números, de xeito que aqueles lectores que non tiveran a ocasión de consultar o meu libro adicado a Zeuxipo, non teñan impedimento para comprender o que se diga ao respecto da nomenclatura neste tratado.

Temos nomes tradicionais[35] para os números ata unha miríade (10 000); podemos por tanto expresar números que sobrepasan unha miríade contando o número de miríades ata chegar a unha miríade de miríades (100 000 000). Sexan estes números chamados números da primeira orde. Diremos que 100 000 000 é a unidade dos números da segunda orde, e incluiremos nos números da segunda orde esa unidade, dez veces a unidade, cen veces a unidade, mil veces a unidade, unha miríade de veces a unidade, ata unha miríade de miríade de veces a unidade, $(100\,000\,000)^2$. De novo, sexa esta a unidade de números da terceira orde, nos que contaremos as unidades, decenas, centenas, millares, miríades, ata as miríades de miríades desta unidade, rematando en $(100\,000\,000)^3$. Do mesmo xeito chamaremos unidade dos números da cuarta orde á miríade de miríades de unidades de terceira orde; e unidade dos números da quinta orde á miríade de miríades de unidades de cuarta orde; e así sucesivamente, ata alcanzar os números da dez mil dez milésima, 100 000 000-ésima orde que rematan en $(100\,000\,000)^{100\,000\,000}$, ao cal chamaremos P, unha miríade de miríades de veces a unidade da dez mil dez milésima orde.[36]

Certamente, os números nomeados desta forma bastan para o noso cálculo, pero é posible ir aínda máis lonxe. De feito, chamemos números do primeiro período aos números que acabamos de describir, dende 1 ata P. Sexa P, o último número do primeiro período, a unidade dos números da primeira orde do segundo período, e deixemos que esta consista nos números dende P ata unha miríade de miríades de veces P, é dicir, $100\,000\,000P$. Sexa o último número da primeira orde do segundo período a unidade da segunda orde do segundo período, e completemos a segunda orde do segundo período ata o número $(100\,000\,000)^2P$. Este último número será a unidade da terceira orde do segundo período. Podemos ir deste xeito ata alcanzar á 100 000 000-ésima orde do segundo período que remata co número $(100\,000\,000)^{100\,000\,000}P = P^2$, unha miríade de miríades de veces a unidade da dez mil dez milésima orde do primeiro período. Tomando P^2 como a unidade da primeira orde do terceiro período, podemos seguir polo mesmo camiño ata alcanzar á 100 000 000-ésima orde do terceiro período que remata con P^3. Tomando P^3 como a unidade da primeira orde do

[35] No tempo de Arquímedes, o sistema de numeración utilizado polos gregos era totalmente inadecuado para expresar números maiores ca cen millóns. Os gregos usaban un método alfabético para escribir os números. Asignaban a cada letra do alfabeto, máis tres símbolos adicionais, un dos valores numéricos $1, 2, \dots, 9$, $10, 20, \dots, 90$ e $100, 200, \dots, 900$. Os números maiores ca mil escribíanse antepoñendo unha raia similar a unha coma antes da cifra que indicaba as unidades de millar; e os números superiores a unha miríade expresábanse escribindo a cifra dos dez mil sobre a letra μ, xa que esta era a inicial de miríade en grego.

[36] En notación moderna, $P = \left(10^8\right)^{10^8} = 10^{8\cdot 10^8} = 10^{800\,000\,000}$. Fagamos notar a importancia dos números ordinais á hora de nomear as ordes de números no sistema descrito. De novo, Arquímedes estaba limitado polo vocabulario grego ata o ordinal dez mil dez milésimo.

cuarto período, continuamos o mesmo proceso ata chegar á 100 000 000-ésima orde do 100 000 000-ésimo período, rematando co número $P^{100\,000\,000}$, unha miríade de miríades de veces a unidade da dez mil dez milésima orde do dez mil dez milésimo período.[37]

Tendo nomeados estes números, consideremos a serie de términos en proporción continua dos cales o primeiro é 1 e o segundo 10, isto é, a progresión xeométrica

$$1, 10^1, 10^2, 10^3, ...$$

O primeiro octeto destes términos,

$$1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$$

pertence, en consecuencia, á primeira orde do primeiro período arriba descrito. O segundo octeto,

$$10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}$$

pertence á segunda orde do primeiro período, sendo o primeiro término do octeto a unidade da segunda orde. De xeito similar, o terceiro octeto estará formado por números da terceira orde do primeiro período e o primeiro número do terceiro octeto será a unidade dos números da terceira orde. É claro que estas propiedades son válidas para calquera octeto.

É importante saber o que segue.[38] Se temos calquera número de términos dunha serie en proporción continua, digamos

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, \dots, A_n, \dots, A_{m+n-1}, \dots$$

dos cales o primeiro é a unidade, $A_1 = 1$, e se collemos dous términos calquera como A_m, A_n e os multiplicamos, o produto $A_m \cdot A_n$ será un término na mesma serie e estará tantos términos distante de A_n como A_m dista de A_1; tamén estará distante de A_1 por un número de términos menos un que a suma dos números de términos polos cales A_m e A_n, respectivamente, distan de A_1, é dicir,

$$A_m \cdot A_n = A_{m+n-1}. \tag{3}$$

[37] Chegamos ao número máis grande que vai nomear Arquímedes no *Arenarius*,

$$P^{100\,000\,000} = 10^{8 \cdot 10^{16}} = 10^{80\,000\,000\,000\,000\,000}.$$

É doado ver que é 100 000 000 veces o produto de $(100\,000\,000)^{99\,999\,999}$ e $P^{99\,999\,999}$.

[38] Arquímedes vai demostrar que se $\{A_p\}$ é a progresión xeométrica de razón $r > 0$ dada por $A_p = r^{p-1}$, $p \in \mathbb{N}$, entón dados dous términos calquera da sucesión A_m e A_n o seu produto tamén é un término da sucesión, que ven dado por $A_m \cdot A_n = A_{m+n-1}$. Naturalmente, trátase de probar a coñecida lei das potencias: $r^m r^n = r^{m+n}$. Observemos que, debido a que Arquímedes empeza a numerar a sucesión en 1, temos un desfasamento dunha unidade entre o índice que indica o término da sucesión e a potencia da razón correspondente a dito término. Como consecuencia, a expresión para o produto de dous términos arrastra ese desfasamento.

En efecto, tomemos o término que está distante de A_n polo mesmo número de términos que A_m dista de A_1. Este número de términos é m, estando contados o primeiro e o último. Entón o término que queremos tomar está m términos distante de A_n, e é por tanto o término A_{m+n-1}. Temos por tanto que probar que $A_m \cdot A_n = A_{m+n-1}$. Agora, términos igualmente distantes doutros términos na proporción continua son proporcionais. Entón

$$\frac{A_m}{A_1} = \frac{A_{m+n-1}}{A_n}.$$

Pero $A_{m+n-1} = A_{m+n-1} \cdot A_1$, pois $A_1 = 1$. Por tanto $A_{m+n-1} = A_m \cdot A_n$. A segunda afirmación é agora obvia, pois A_m está m términos distante de A_1, A_n está n términos distante de A_1, e A_{m+n-1} está $m + n - 1$ términos distante de A_1.

Libro IV O descrito ata aquí foi en parte suposto e en parte probado. Agora demostrarei a miña proposición.[39]

Dado que supuxemos que o diámetro da semente de papoula non é menor ca a corenteava parte da anchura dun dedo, e, como as correspondentes esferas están unha coa outra na proporción triplicada dos seus diámetros, séguese que a esfera de diámetro unha anchura de dedo é menor ca 64 000 veces o volume da semente de papoula. Polo tanto, se temos unha esfera de diámetro unha anchura de dedo chea de area, a cantidade de grans de area contida será menor ca $64\,000 \cdot 10\,000 = 640\,000\,000$, é dicir, menor ca 6 unidades da segunda orde máis 40 000 000 de unidades da primeira orde, e, consecuentemente, menor ca 10 unidades da segunda orde.[40]

Agora incrementamos gradualmente o diámetro da suposta esfera, multiplicándoo por 100 cada vez. Entón, recordando que o volume da esfera é deste xeito multiplicada por 100^3 ou 1 000 000, ao número de grans de area que estaría contido nunha esfera con cada diámetro sucesivo pode chegarse como segue.[41]

Consideremos unha esfera de diámetro 100 veces a anchura dun dedo. O seu volume será 1 000 000 de veces superior ao volume da esfera de diámetro a anchura dun dedo. Se temos unha esfera de diámetro 100 veces a anchura dun dedo chea de area, a cantidade de grans de area contida será menor ca 1 000 000 de veces 10

[39] Sexa $V(d) = \frac{\pi}{6}d^3$ o volume da esfera de diámetro d. Entón a razón entre os volumes de dúas esferas de diámetros d_1 e d_2 é

$$\frac{V(d_1)}{V(d_2)} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3.$$

Logo, como ben observará Arquímedes, a razón entre os volumes de dúas esferas é igual ao cubo da razón entre os seus diámetros. En particular, se $d_1 = 100d_2$ entón $V(d_1) = (100)^3V(d_2) = 10^6V(d_2)$. Por este motivo, como veremos a continuación, Arquímedes utilizará repetidamente, nunha longa e detallada lista de pasos, o caso particular da igualdade (3) para $r = 10$ e $n = 6$, é dicir, a propiedade $A_m \cdot A_6 = A_{m+5}$, ou equivalentemente, $10^m10^6 = 10^{m+6}$. Probablemente, Arquímedes multiplique o diámetro por 100 en cada paso porque así o volume da esfera incrementarase por $A_6 = 10^6$, un número do primeiro octeto.

[40] Denotemos por $G(d)$ o número de grans de area que enchen unha esfera de diámetro d, por δ o diámetro da anchura dun dedo, e por d_p o diámetro dunha semente de papoula. Por hipótese, $d_p \geq \frac{\delta}{40}$. Así pois, $V(\delta) = \left(\frac{\delta}{d_p}\right)^3V(d_p) \leq (40)^3V(d_p) = 64\,000V(d_p)$. Por hipótese, $G(d_p) \leq 10^4$. Logo

$$\begin{aligned} G(\delta) &< 64\,000 \cdot 10\,000 = 640\,000\,000 = 6{,}4 \cdot 10^8 \\ &= 6 \text{ unidades da segunda orde} + 40\,000 \text{ unidades da primeira orde} \\ &< 10 \text{ unidades da segunda orde} = A_{10}. \end{aligned}$$

[41] A progresión $\{A_p\}$ coa que finalmente traballa Arquímedes é $A_p = 10^{p-1}$, $p \in \mathbb{N}$. Así pois, $V(100d) = A_7V(d)$ e $G(100d) = A_7G(d)$. En cada paso, considerarase unha esfera de diámetro 100 veces o diámetro da esfera considerada no paso anterior. O proceso comeza coa esfera de diámetro a anchura dun dedo, δ, e detense ao chegar a unha esfera de diámetro maior ca o da esfera do Universo. Arquímedes emprega, obviamente, a acotación obtida previamente, $d_u < 10^{10}$ estadios e, ademais, que un estadio é menor ca unha miríade de miríades de veces a anchura dun dedo, é dicir, 1 estadio $< 10^8\delta = A_9 \cdot \delta$.

unidades da segunda orde, ou sexa, o sétimo término da serie multiplicado polo décimo término da serie, que é igual ao décimo sexto término da serie, é dicir, 10 000 000 de unidades da segunda orde.[42]

Analogamente, o volume dunha esfera de diámetro 10 000 veces a anchura dun dedo será 1 000 000 de veces superior ao volume da esfera de diámetro 100 veces a anchura dun dedo. Se temos unha esfera de diámetro 10 000 veces a anchura dun dedo chea de area, a cantidade de grans de area contida será menor ca unha miríade de miríades de veces 10 000 000 de unidades da segunda orde, ou sexa, o sétimo término da serie multiplicado polo décimo sexto término da serie, que é igual ao vixésimo segundo término da serie, é dicir, 100 000 unidades da terceira orde.[43]

Dado que a esfera de diámetro un estadio é menor ca a esfera de diámetro unha miríade de veces a anchura dun dedo, é claro que o número de grans de area contidos nun volume igual ao da esfera de diámetro un estadio é menor ca 100 000 unidades da terceira orde.[44]

De xeito similar, o volume dunha esfera de diámetro 100 estadios terá un volume 1 000 000 de veces superior ao volume da esfera de diámetro un estadio. Se temos unha esfera de diámetro 100 estadios chea de area, a cantidade de grans de area contida será menor ca 1 000 000 de veces 100 000 unidades da terceira orde, ou sexa, o sétimo término da serie multiplicado polo vixésimo segundo término da serie, que é igual ao vixésimo octavo término da serie, é dicir, 1000 unidades da cuarta orde.[45]

Analogamente, o volume dunha esfera de diámetro 10 000 estadios terá un volume 1 000 000 de veces superior ao volume da esfera de diámetro 100 estadios. Se temos unha esfera de diámetro 10 000 estadios chea de area, a cantidade de grans de area contida será menor ca 1 000 000 de veces 1000 unidades da cuarta orde, ou sexa, o sétimo término da serie multiplicado polo vixésimo octavo término da serie, que é igual ao trixésimo cuarto término da serie, é dicir, 10 unidades da quinta orde.[46]

Similarmente, o volume dunha esfera de diámetro 1 000 000 de estadios terá un volume 1 000 000 de veces superior ao volume da esfera de diámetro 10 000 estadios. Se temos unha esfera de diámetro 1 000 000 de estadios chea de area, a cantidade de grans de area contida será menor ca 1 000 000 de veces 10 unidades da quinta orde, ou sexa, o sétimo término da serie multiplicado polo trixésimo cuarto término da serie, que é igual ao cuadraxésimo término da serie, é dicir, 10 000 000 de unidades da quinta orde.[47]

O volume dunha esfera de diámetro 100 000 000 de estadios terá un volume 1 000 000 de veces superior ao volume da esfera de diámetro 1 000 000 de estadios. Se temos unha esfera de diámetro 100 000 000 de estadios chea de area, a cantidade

[42] $G(100\delta) < A_{10}A_7 = A_{16} = 10\,000\,000$ de unidades da segunda orde.
[43] $G(10\,000\delta) < A_{16}A_7 = A_{22} = 100\,000$ unidades da terceira orde.
[44] $G(1 \text{ estadio}) < G(10\,000\delta) < A_{22} = 100\,000$ unidades da terceira orde.
[45] $G(100 \text{ estadios}) < A_{22}A_7 = A_{28} = 1000$ unidades da cuarta orde.
[46] $G(10^4 \text{ estadios}) < A_{28}A_7 = A_{34} = 10$ unidades da quinta orde.
[47] $G(10^6 \text{ estadios}) < A_{34}A_7 = A_{40} = 10\,000\,000$ de unidades da quinta orde.

de grans de area contida será menor ca 1 000 000 de veces 10 000 000 de unidades da quinta orde, ou sexa, o sétimo término da serie multiplicado polo cuadraxésimo término da serie, que é igual ao cuadraxésimo sexto término da serie, é dicir, 100 000 unidades da sexta orde.[48]

Analogamente, o volume dunha esfera de diámetro 10 000 000 000 de estadios terá un volume 1 000 000 de veces superior ao volume da esfera de diámetro 100 000 000 de estadios. Se temos unha esfera de diámetro 10 000 000 000 de estadios chea de area, a cantidade de grans de area contida será menor ca 1 000 000 de veces 100 000 unidades da sexta orde, ou sexa, o sétimo término da serie multiplicado polo cuadraxésimo sexto término da serie, que é igual ao quincuaxésimo segundo término da serie, é dicir, 1000 unidades da sétima orde.[49]

Pero, dado que demostramos que o diámetro do Universo é menor ca 10 000 000 000 de estadios, é claro que o número de grans de area que poderían estar contidos nunha esfera de volume igual ao do noso Universo é menor ca 1000 unidades da sétima orde de números.[50]

Acabamos de establecer que o número de grans de area que enchen un volume igual ao do Universo, no senso dado pola maioría dos astrónomos, é 1000 unidades da sétima orde. Probaremos agora que incluso unha esfera do tamaño atribuído por Aristarco á esfera das estrelas fixas contería un número de grans de area menor ca 1 000 000 de unidades da oitava orde de números.[51] Porque supuxemos que a razón do diámetro da Terra co diámetro do que comunmente chamamos Universo é igual á razón do diámetro deste Universo coa esfera das estrelas fixas proposta por Aristarco, é dicir,

$$\frac{d_e}{d_u} = \frac{d_u}{d_t}.$$

Pero xa vimos que $d_u < 10\,000 d_t$, de onde $d_e < 10\,000 d_u$, o diámetro da esfera das estrelas fixas é menor ca unha miríade de veces o diámetro do Universo. Por tanto, o volume da esfera das estrelas fixas é menor ca $(10\,000)^3 = 1\,000\,000\,000\,000$ de veces o volume da esfera do Universo. Séguese que o número de grans de area que estarían contidos nunha esfera igual á esfera das estrelas fixas sería menor ca 1 000 000 000 000 de veces 1000 unidades da sétima orde, ou sexa, o décimo terceiro término da serie multiplicado polo quincuaxésimo segundo término da serie, que é igual ao sexaxésimo cuarto término da serie, é dicir, 10 000 000 de unidades da oitava orde.[52]

Polo tanto é obvio que o número de grans de area que enchen unha esfera do tamaño que Aristarco lle confire á esfera das estrelas fixas é menor ca mil miríades

[48] $G(10^8 \text{ estadios}) < A_{40}A_7 = A_{46} = 100\,000$ unidades da sexta orde.

[49] $G(10^{10} \text{ estadios}) < A_{46}A_7 = A_{52} = 1000$ unidades da sétima orde.

[50] É dicir, se a esfera de centro o centro da Terra e radio igual á distancia entre o centro da Terra e o centro do Sol estivera chea de area, contería como moito $G(d_u) < 10^{51}$ grans.

[51] Ou sexa, $G(d_e) < 10^{63}$.

[52] $G(d_e) < (10\,000)^3 G(d_u) = 10^{12} G(d_u) < A_{13}A_{52} = A_{64} = 10\,000\,000$ de unidades da oitava orde.

de unidades da oitava orde. [53]

Concibo que estas cousas, rei Gelón, parecerán incribles para a gran maioría das persoas que non estudaron Matemáticas; pero para aqueles que están familiarizados con elas e pensaron na cuestión das distancias e tamaños da Terra, o Sol e a Lúa e todo o Universo, a demostración levará á convicción. E foi por esta razón que pensei que o asunto non sería inapropiado para a túa consideración.

[53]Segundo os cálculos de Arquímedes, una esfera de aproximadamente 0,5 milímetros de diámetro, o diámetro dunha semente de papoula, contén 10^4 grans de arena. Por outra banda, $G(d_e) < 10^{63}$. Entón o volume da esfera das estrelas fixas sería aproximadamente 10^{59} veces maior ca o volume dunha semente de papoula. Logo, o diámetro da esfera das estrelas fixas será $d_e = 0{,}5\sqrt[3]{10^{59}} = 2{,}3208 \cdot 10^{19}$ milímetros. O radio da esfera das estrelas fixas sería de $r_e = 1{,}1604 \cdot 10^{16}$ metros. Dado que un ano luz equivale a 9 460 730 472 580 800 metros, temos que, aproximadamente, $r_e = 1{,}23$ anos luz. Este é certamente un valor moi pequeno, xa que, por exemplo, a distancia do Sol á estrela máis próxima, *Próxima Centauri*, é de 4,22 anos luz. Non obstante, dadas as circunstancias da época resulta un cálculo admirable. Hoxe calcúlase que o radio aproximado do Universo observable dende a Terra é de 13 700 000 000 de anos luz. Nas condicións descritas por Arquímedes, unha esfera deste radio contería unha cantidade de grans de area menor ca 10^{91}.